1 Opérations sur les matrices

Exercice 1 Calculer $A+B$, $2A+C$ et $3A+B+C$ pour les matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&1&-3\\2&1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 Parmi les matrices suivantes, quelles multiplications peut-on effectuer ? Quelle est la taille des matrices obtenues ? Calculer l'ensemble des multiplications possibles :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&6&7\\9&10&11\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&3&0&4\\0&1&2&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Indice : Il y a 10 multiplications possibles.

2 Matrice inverse et diagonalisation

Exercice 3 Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 4 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible ? Justifier. Si oui, donner son inverse.
2. Ecrire le polynôme caractéristique de la matrice A.
3. Quelles sont les valeurs propres de A ?
4. Pour chaque valeur propre, donner les vecteurs propres associés.
5. Finaliser la diagonalisation de la matrice. Pour cela, écrire la matrice de passage P et la matrice diagonale Δ telle que la matrice A s'écrive sous la forme $P\Delta P^{-1}$.
6. Calculer P^{-1}.
7. Soit $k\in\mathbb{N}$. Calculer A^k.

Exercice 5 Même exercice que le précédent en prenant $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$

Exercice 6 Même exercice que l'exercice 4 en prenant $A=\begin{pmatrix}-4&9\\-6&11\end{pmatrix}$

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Donner le polynôme caractéristique de A. En déduire que la matrice A admet une seule et unique valeur propre.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 8 On propose dans cette exercice de diagonaliser la matrice 3x3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$$

1. Factoriser le polynôme P. En déduire les valeurs propres de M.
2. Pour chaque valeur propre, donner les vecteurs propres associés.
3. Finaliser la diagonalisation de la matrice M en donnant la matrice de passage P et la matrice diagonale Δ telle que $M = P\Delta P^{-1}$. Calculer également P^{-1}.
4. La matrice M est-elle inversible ? Justifier. Si oui, donner son inverse.

Exercice 9 On considère une matrice R_θ dépendant d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rappel : On rappelle la formule de trigonométrie suivante : $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$.

1. La matrice R_θ est-elle inversible quel que soit θ ? Montrer que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
2. Ecrire $P(\lambda)$, le polynôme caractéristique de R_θ.
3. Montrer que $P(\lambda)$ n'admet pas de racine réelle.
4. En déduire que R_θ n'est pas diagonalisable, quel que soit θ.
5. On rappelle qu'une matrice 2x2 est une transformation du plan $\mathbb{R}^2$. Quelle transformation du plan représente R_θ ?

   Aide : On pourra calculer $R_\theta e_1$ et $R_\theta e_2$ (avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) et en fixant par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour voir comment les vecteurs de base sont transformés.