Voici un corrigé des exercices non traités en cours.

Exercice 6

1. $\det(A) = -4\times 11 - 9\times(-6) = -10 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. $P(\lambda) = \det(A-\lambda Id) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 9 \\ -6 & 11-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(11-\lambda)+54$
   $= 10-7\lambda+\lambda^2 = (\lambda-2)(\lambda-5)$
3. $\lambda = 2$ et $\lambda = 5$ sont les valeurs propres de A.
4. Rappel : x vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda Id)x = \vec{0}$
   <u>Cas $\lambda = 2$</u>
   $$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution du système. Il est donc vecteur propre associé à $\lambda = 2$.
   <u>Cas $\lambda = 5$</u>
   $$\left(\begin{array}{cc|c} -9 & 9 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution du système. Il est donc vecteur propre associé à $\lambda = 5$.
5. et 6. $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
7.
   $$\begin{array}{cccc} P\Delta^k & \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} & P\Delta^k P^{-1} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 2^k & 5^k \\ 2\times 2^k & 5^k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 2^k & 5^k \\ 2\times 2^k & 5^k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3\times 2^k-2\times 5^k & -3\times 2^k+3\times 5^k \\ 2\times 2^k-2\times 5^k & -2\times 2^k+3\times 5^k \end{pmatrix} \end{array}$$
   On a donc $A^k = P\Delta^k P^{-1} = 2^k\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 5^k\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7

1. $\det(A) = 2\times 3 - 3\times(-1) = 9 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Erratum : Ici la question n'est pas de montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre mais qu'elle n'en admet pas du tout. (Je vous propose en dessous une autre matrice, où on est dans le cas d'une seule et unique valeur propre).
   $$P(\lambda) = \det(A-\lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)+3 = 9-5\lambda+\lambda^2$$
   Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-5)^2-4\times 9 = -11$ est strictement négatif. Donc le polynôme ne s'annule pas. La matrice A n'admet donc pas de valeur propre.
3. La matrice A n'admettant aucune valeur propre, il est donc impossible de la diagonaliser.

Exercice 7 bis Prendre les questions de l'exercice 7 avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. $\det(A) = 4\times 2 - (-1)\times 1 = 9 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $$P(\lambda)=\det(A-\lambda Id)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)+1=9-6\lambda+\lambda^2=(\lambda-3)^2$$
$\lambda=3$ est donc l'unique valeur propre de A.

3. La matrice n'admet qu'une seule valeur propre et elle n'est pas diagonale, donc elle n'est pas diagonalisable (cf. propriété du cours).
Si on veut aller un peu plus loin, on peut essayer de calculer les vecteurs propres :
$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{array}\right)$$
Donc $x=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est la seule solution de ce système. Un vecteur propre ne pouvant être nul, A n'admet pas de vecteur propre. Sans vecteur propre on ne peut donc pas construire la matrice de transformation qui intervient dans la diagonalisation.

Exercice 8

1. $P(\lambda)=\lambda(\lambda^2-1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$.
2. <u>Cas $\lambda=0$</u>
$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$
$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est solution du système. Il est donc vecteur propre associé à $\lambda=0$.
3. <u>Cas $\lambda=1$</u>
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$
$x=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est solution du système. Il est donc vecteur propre associé à $\lambda=1$.
4. <u>Cas $\lambda=-1$</u>
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$
$x=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est solution du système. Il est donc vecteur propre associé à $\lambda=-1$.
5. $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. A l'aide d'un pivot on pourra calculer P^{-1} et on aboutira à $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

6. La matrice M n'est pas inversible. 2 possibilités de justification ici.
   - Soit on essaie un pivot de Gauss et on arrive à une configuration avec uniquement 2 pivots.
   - Soit on remarque que $P(0) = \det(A - 0 \times Id) = \det(A)$ et que $P(0) = 0^3 - 0 = 0$. Donc $\det(A) = 0$ ce qui nous conduit à A non inversible.

Exercice 9 Notons que $R_0 = Id$ et $R_{-\pi} = -Id$. Ces 2 matrices n'ayant aucun mystère pour nous, on s'intéressera au cas où $\theta \neq k\pi$

1. $\det R_\theta = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$. R_θ est donc inversible, et son inverse est

$$R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}$$

2. $P(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + (\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + (\sin\theta)^2 = 1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2$.
   Le discrimiannt de ce polynôme est $\Delta = (2\cos\theta)^2 - 4 = 4((\cos\theta)^2 - 1)$. On a donc $\Delta < 0$ car $\cos\theta \in]-1, 1[$ si $\theta \neq k\pi$. Le polynôme $P(\lambda)$ n'admet donc pas de racine réelle.
3. Comme $P(\lambda)$ n'a aucune racine alors R_θ ne possède aucune valeur propre. A n'est donc pas diagonalisable, quel que soit θ (différent des cas $\theta = k\pi$).
4. $R_{\frac{\pi}{2}} e_1 = e_2$ et $R_{\frac{\pi}{2}} e_2 = -e_1$. Si on fait un dessin, on peut deviner alors que $R_{\frac{\pi}{2}}$ représente la rotation d'angle $\pi/2$. (Et de manière générale, R_θ représente la rotation d'angle θ). Ceci explique donc aussi pourquoi $R_\theta^{-1} = -R_\theta$: la transformation inverse d'une rotation d'angle θ, est une rotation d'angle $-\theta$. Et on a bien $R_\theta^{-1} R_\theta = Id$, qui laisse le plan $\mathbb{R}^2$ inchangé.