Math. Ann. 295, 201–222 (1993)

Mathematische Annalen

Courbes stables de genre 2 et leur schéma de modules

Qing Liu

CNRS, URA 226, Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex, France

Reçu le 20 mai 1992; version revisée le 26 juin 1992

Mathematics Subject Classification (1991): 14G, 14H, 11G

0 Introduction

Soient R un anneau de valuation discrète, K son corps de fractions et k son corps résiduel. Considérons une courbe projective lisse C sur K, géométriquement connexe de genre $g(C) \geqq 1$. D'après un théorème de Deligne et Mumford [D-M, Corollary 2.7], il existe une extension finie K' de K, telle que $C \times_K K'$ soit la fibre générique d'une courbe stable $\mathscr{C}$ sur $R_{K'}$, clôture intégrale de R dans K'. Soit s' un point fermé de Spec $R_{K'}$, soit $\mathscr{C}_{\bar{s}} = \mathscr{C} \times_{R_{K'}} k(s')^{\mathrm{alg}}$. Alors $C_{\bar{s}}$ est une courbe stable sur k^{alg}, elle ne dépend pas du choix de s', ni de celui de K'. Rappelons que si C est une courbe elliptique (i.e. une variété abélienne de dimension 1), la courbe $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est complètement déterminée par l'invariant modulaire j de C. Plus précisément, si $j \in R$, alors $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est lisse, son invariant modulaire est l'image de j dans le corps résiduel de R; si $j \notin R$, alors $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est une courbe rationelle avec un seul point double ordinaire.

Dans le présent travail, notre premier but est d'obtenir le même type de résultat lorsque C est de genre 2. Ce problème a été évoqué par Coleman [C, p. 16, remark 3]. Une solution complète est donnée par le théorème 1 grâce aux invariants $J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10}$ introduits par Igusa. Nous nous intéressons ensuite aux extensions K' de K telles que C ait réduction stable sur K'.

Pratiquement on peut calculer les invariants J_{2i} de la façon qui suit. Si car$(K) \neq 2$, C est donnée par une équation $y^2 = P(x)$. Si deg $P(x) = 5$, les invariants J_{2i} sont des fonctions polynômiales explicites des coefficients de $P(x)$ [Ig, p. 623]. Si deg $P(x) = 6$, cela peut encore se faire sans trop de difficultés [Me, par. 1.3]. Si car$(K) = 2$, les calculs des J_{2i} ne sont pas plus difficiles.

Un résultat intimement lié au théorème 1 est la description du schéma de modules $\overline{\mathfrak{M}}_2$ sur $\mathbb{Z}$ des courbes stables de genre 2 (cf. [D-M], par. 1). Soit $\mathbb{Z}[\underline{J}]$ la $\mathbb{Z}$-algèbre graduée $\mathbb{Z}[\underline{J}] := \mathbb{Z}[J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10}]/(J_4^2 - J_2J_6 + 4J_8)$ avec deg $J_{2i} = 2i$. Soient $\mathfrak{X} = \mathrm{Proj}\,\mathbb{Z}[\underline{J}]$ et $\mathscr{M}_2$: $\boldsymbol{Sch} \longrightarrow \boldsymbol{Ens}$ le foncteur qui à tout schéma S, associe les classes d'isomorphisme de courbes propres lisses sur S, à fibres géométriques connexes et de genre 2. Alors on a un morphisme de foncteurs

$$\phi : \mathcal{M}_2 \to \mathbf{h}_{\mathfrak{X}} := \mathrm{Mor}(\cdot, \mathfrak{X}) \tag{1}$$

qui induit un isomorphisme du schéma de modules grossier $\mathfrak{M}_2$ sur l'ouvert principal $D_+(J_{10})$ de $\mathfrak{X}$ [Ig, Theorem 2]. Concrètement, soit C une courbe projective lisse de genre 2 sur un corps F, soient J_{2i} les invariants de C calculés à partir d'une équation de C, alors $(J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10})$ sont les "coordonnées homogènes" de $\phi([C]) \in \mathfrak{X}(F)$, où $[C]$ est la classe d'isomorphisme de C. En utilisant le théorème 1 et le morphisme ϕ ci-dessus, on montre que $\overline{\mathfrak{M}}_2$ est la normalisation d'un certain éclatement du schéma $\mathfrak{X}$ (théorème 2). Sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$, cette description est relativement simple (corollaire 3.2).

Dans la suite du travail, on s'intéresse à des problèmes de nature plus arithmétique. Au par. 4, on dresse la table des groupes d'automorphismes Aut (X) des courbes stables X de genre 2 sur k^{alg}. Le cas où X est lisse est bien classique (voir par exemple [Ig, par. 8]). Cette table sera utile au par 6. Pour toute courbe stable $\mathscr{C}$ de genre 2 sur R, les épaisseurs des points singuliers de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ sont calculées en fonction des invariants J_{2i} de sa fibre générique $\mathscr{C}_\eta$ (par. 5, proposition 2), ce qui permet de déterminer le modèle minimal de $\mathscr{C}_\eta$, ainsi que le modèle de Néron de la Jacobienne de $\mathscr{C}_\eta$. Au par. 6, on suppose K strictement hensélien, on étudie alors l'extension minimale L de K telle que C ait réduction stable sur L. Après un résumé de quelques propriétés générales (propositions 3 et 4), on les applique aux courbes de genre 2 (corollaire 4.1). On donne pour terminer un critère très simple de bonne réduction en car$(k) \neq 2, 3, 5$ (propositions 5 et 6).

Supposons K strictement hensélien et car$(k) \neq 2, 3, 5$. Soit $\mathscr{X}$ le modèle minimal de C sur K. Tous les types possibles pour la fibre spéciale $\mathscr{X}_s$ de $\mathscr{X}$ ont été répertoriés par Ogg ([Og], liste complétée par [N-U]). On peut chercher un moyen de reconnaître $\mathscr{X}_s$ à partir des invariants de C, comme pour les courbes elliptiques. D'après Viehweg ([V par 3 et par 8)], $\mathscr{X}_s$ est complètement déterminée par trois données: $\mathscr{C}_s$, des "degrés" (qui sont les épaisseurs des points singuliers de $\mathscr{C}$) et l'action du groupe Gal (L/K) sur $\mathscr{C}_s$, où L est l'extension minimale de K définie ci-dessus. Les deux premières données sont déterminées par le théorème 1 et la proposition 2. Quant à la troisième, elle est l'objet d'un autre travail [Li-2] qui fait suite à celui-ci. Une version condensée des par. 1 et par. 3 du présent article est déjà parue [Li-1].

Notations. Dans tout de qui suit,

R sera un anneau de valuation discrète,

K son corps de fractions, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et $k = R/\mathfrak{m}$ son corps résiduel.

On note $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ l'homomorphisme canonique de R sur k,

$\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, la valuation normalisée de K.

Pour tout schéma X sur R, on note X_η la fibre générique de X, X_s la fibre spéciale et $X_{\bar{s}} := X_s \times k^{\mathrm{alg}}$ la fibre spéciale géométrique.

Pour tout élément homogène $H \in \mathbb{Z}[\underline{J}]$, *on note aussi par* H *sa valeur en une équation d'une courbe* C s'il n'y a pas de confusion possible.

1 Réduction stable des courbes de genre 2 après une extension de K

Rappelons d'abord quelques notions et propriétés de base. Soient F un corps et $f = u_0x^n + \cdots + u_n \in F[u_0, \dots, u_n][x]$. Un *invariant de degré* d *de* f est un polynôme homogène $H \in F[u_0, \dots, u_n]$, de degré d, qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) $nd \in 2\mathbb{N}$;
(ii) $H(u_0, u_1, \ldots, u_n) = (-1)^r H(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_0)$, où $r = nd/2$;
(iii) Pour tout $a, b \in F^{\mathrm{alg}}$, $a \neq 0$, si l'on écrit

$$\sum_{0 \leqq j \leqq n} u_j(ax+b)^{n-j} = \sum_{0 \leqq j \leqq n} u'_j x^{n-j} \in F^{\mathrm{alg}}[u_0, \ldots, u_n][x],$$

alors $H(u'_0, \ldots, u'_n) = a^r H(u_0, \ldots, u_n)$.

Par exemple, le discriminant de f est un invariant de degré $2n-2$. Pour $n = 6$, Igusa a défini des invariants $J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, u_0, \ldots, u_6]$ de $f = u_0x^6 + \cdots + u_6$, avec $\deg J_{2i} = 2i$ [Ig, par. 3]. Ces éléments engendrent une $\mathbb{Z}$-algèbre graduée $\mathbb{Z}[\underline{J}] = \mathbb{Z}[J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10}]$ avec une unique relation $J_4^2 - J_2J_6 + 4J_8 = 0$.

On appelle *courbe hyperelliptique* sur F toute courbe projective lisse X, géométriquement connexe sur F, telle qu'il existe un morphisme séparable $X \to \mathbb{P}^1_F$ de degré deux. Ce morphisme sera alors unique aux automorphismes de $\mathbb{P}^1_F$ près.

Supposons à présent que $g(X) = 2$, alors X est hyperelliptique. Elle est donc définie par une équation hyperelliptique

$$y^2 + Q(x)y = P(x), \quad P, Q \in F[x], \quad \deg Q \leqq 3,\ \deg P \leqq 6. \qquad (*)$$

Si $\mathrm{car}(F) \neq 2$, on peut prendre $Q = 0$, et on appellera *invariants de X associé à* $(*)$ les valeurs des J_{2i} en $(a_0, \ldots, a_6)$, où $a_0x^6 + \cdots + a_6 = P(x)$ (a_0 peut être nul). Pour simplifier, ces valeurs seront encore notées J_{2i}. Si $\mathrm{car}(F) = 2$, on relève les polynômes P, Q en $\widetilde{P}(x), \widetilde{Q}(x) \in W(F)[x]$ sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(F)$, ayant respectivement même degré que P et Q, on calcule les invariants associés à $4\widetilde{P} + \widetilde{Q}^2$ qui sont des éléments de $W(F)$. Les J_{2i} de X associés à $(*)$ sont alors obtenus en réduisant ceux-ci modulo $2W(F)$. Des calculs directs sont possibles (loc. cit.), mais il faut modifier l'équation auparavant.

Dans tous les cas, si $J'_2, \ldots, J'_{10}$ sont les invariants de X associés à une autre équation hyperelliptique, alors il existe $a \in F - \{0\}$ tel que $J'_{2i} = a^{2i}J_{2i}$. Inversement, si deux courbes X et X' ont pour invariants respectifs J_{2i}, J'_{2i} vérifiant ce type d'égalité, alors elles sont isomorphes sur F^{alg} (loc. cit.).

Pour déterminer la réduction stable des courbes de genre 2, nous aurons besoin des éléments homogènes de $\mathbb{Z}[\underline{J}]$ suivants:

$$I_4 := J_2^2 - 2^3 \cdot 3J_4, \quad I_{12} := -2^3J_4^3 + 3^2J_2J_4J_6 - 3^3J_6^2 - J_2^2J_8. \qquad (2)$$

Soit X une courbe stable irréductible de genre arithmétique 2 sur k^{alg}, avec un unique point double ordinaire. Sa normalisation Y est une courbe elliptique qui peut être définie par une équation (si $\mathrm{car}(k) \neq 2$):

$$y^2 = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

En appliquant les formules de [Ig, p. 623] au polynôme $x^4 + ax^2 + bx + c$, on obtient $I_4 = 2^{-4}c_4(Y)$, $I_{12} = 2^{-12}\Delta(Y)$ et donc $j(Y) = I_4^3 I_{12}^{-1}$. C'est ce qui motive l'introduction des fonctions I_4 et I_{12}. On peut remarquer qu'avec les notations de [Me, pars. 1.3–1.4], on a $A' = 2^3J_2$, $B' = 2^2I_4$ et $E = 2^{12} \cdot 3^3 I_{12}$.

Définition 1. Soient C une courbe sur K, R' un anneau de valuation discrète dominant R. Un *modèle stable de* C *sur* R' est une courbe stable $\mathscr{C}$ sur R' (voir [D-M, définition 1.1]) à fibre générique isomorphe à $C \times_K \operatorname{Fr} R'$.

Soient F une extension finie de K, R_F la clôture intégrale de R dans F. On dira que C *a réduction stable sur* F si elle admet un modèle stable $\mathscr{C}$ sur une localisation R' de R_F en un idéal maximal.

On notera dans toute la suite $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ la fibre spéciale géométrique de $\mathscr{C}$ sur R'. Cette courbe sur k^{alg} ne dépend pas du choix de R', ni de celui de F.

Pour condenser l'énoncé du théorème suivant, on pose

$$\varepsilon = \varepsilon(k) = 1 \text{ si } \operatorname{car}(k) \neq 2,3;\ \varepsilon = 3 \text{ si } \operatorname{car}(k) = 3 \ \text{ et } \ \varepsilon = 4 \text{ si } \operatorname{car}(k) = 2\,. \qquad (3)$$

On note $I_2 := 12^{-1}J_2$, $I_6 := J_6, I_8 := J_8$. Alors $I_{2\varepsilon}$ est un élément homogène de $\mathbb{Z}[\underline{J}]$ de degré 2ε.

Théorème 1. *Soit C une courbe projective lisse sur K, géométriquement connexe et de genre 2, soient $J_{2i}, 1 \leqq i \leqq 5$, les invariants de C associés à une équation $y^2 + Q(x)y = P(x)$. Alors on a*

(I) (Igusa) *$C_{\bar{s}}$ est lisse si et seulement si: $J_{2i}^5 J_{10}^{-i} \in R$ pour tout $i \leqq 5$;*

(II) *$\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est irréductible avec un seul point double si et seulement si: $J_{2i}^6 I_{12}^{-i} \in R$ pour tout $i \leqq 5$ et $J_{10}^6 I_{12}^{-5} \in \mathfrak{m}$. La normalisation de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est alors une courbe elliptique, d'invariant modulaire $j = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$;*

(III) *$\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est irréductible avec deux points doubles si et seulement si: $J_{2i}^2 I_4^{-i} \in R$ pour tout $i \leqq 5$, $J_{10}^2 I_4^{-5} \in \mathfrak{m}$, $I_{12} I_4^{-3} \in \mathfrak{m}$, et $J_4 I_4^{-1}$ ou $J_6^2 I_4^{-3}$ inversible dans R;*

(IV) *$\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est constituée de deux droites projectives se coupant transversalement en trois points si et seulement si: $J_{2i}^2 I_4^{-i} \in \mathfrak{m}$ pour tout $2 \leqq i \leqq 5$;*

(V_*) *$\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est la réunion de deux composantes irréductibles se coupant en un seul point si et seulement si:*

$$I_4^{\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-2} \in \mathfrak{m}, \quad J_{10}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-5} \in \mathfrak{m}, \quad I_{12}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-6} \in \mathfrak{m}\,, \qquad (4)$$

où $I_{2\varepsilon}$ est définie dans (3) (cela implique que pour tout $i \leqq 5$, $J_{2i}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-i} \in R$). De plus,

(V) *les composantes de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ sont lisses si et seulement si: en plus de* (4), *on a $I_4^{3\varepsilon} J_{10}^{-\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-1} \in R$, $I_{12}^{\varepsilon} J_{10}^{-\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-1} \in R$. Soient j_1, j_2 les invariants modulaires des deux composantes de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$, alors*

$$\begin{cases} (j_1 j_2)^{\varepsilon} = \overline{(I_4^{3\varepsilon} J_{10}^{-\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-1})} \\ (j_1 + j_2)^{\varepsilon} = 2^6 \cdot 3^3 + \overline{(I_{12}^{\varepsilon} J_{10}^{-\varepsilon} I_{2\varepsilon}^{-1})}; \end{cases}$$

(VI) *une seule des deux composantes de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est lisse si et seulement si: en plus de* (4), *on a $I_4^3 I_{12}^{-1} \in R$, $J_{10}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon} I_{12}^{-\varepsilon} \in \mathfrak{m}$. L'invariant modulaire de la composante lisse de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est alors $j = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$;*

(VII) *les deux composantes de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ sont singulières si et seulement si: en plus de* (4), *on a $I_{12} I_4^{-3} \in \mathfrak{m}$, et $J_{10}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon} I_4^{-3\varepsilon} \in \mathfrak{m}$.*

Preuve. Comme $\dim_{k^{\mathrm{alg}}} H^1(\mathscr{C}_{\bar{s}}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\bar{s}}}) = 2$, par des arguments combinatoires simples on voit que les sept cas recensés sont les seuls possibles, il suffit donc de montrer la partie "seulement si" du théorème.

Expliquons d'abord l'idée de la démonstration. Suivant les différentes situations, on écrit une équation aussi simple que possible d'un ouvert affine de $\mathscr{C}$ dense dans toutes les fibres, et on vérifie ensuite le théorème par des calculs directs. Cela est possible sauf pour un cas précis où $\operatorname{car}(k) = 2$ et où $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est réunion de deux courbes elliptiques d'invariant modulaire nul. Dans ce cas-là, on raisonne sur l'espace de modules $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times R$, et on conclut par un argument de "continuité".

Etant donné que le modèle stable est "stable" par changement de base, dans la démonstration on peut toujours remplacer R par un anneau de valuation discrète R'' dominant R', et donc remplacer K par $\operatorname{Fr} R''$. Il est alors possible de supposer $R' = R$ et k algébriquement clos. Comme $g(C) = 2$, on a un morphisme séparable $C \to \mathbb{P}^1_K$ de degré 2. Soit σ l'involution hyperelliptique de C, alors σ se prolonge en une involution de $\mathscr{C}$ [D-M, lemma 1.12]. Soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{Z} := \mathscr{C}/\langle\sigma\rangle$ le morphisme fini canonique. Alors $\mathscr{Z}$ est un R-schéma normal, à fibre spéciale $\mathscr{Z}_s$ réduite et connexe (car c'est vrai pour $\mathscr{C}$) et à fibre générique $\mathscr{Z}_\eta \simeq \mathbb{P}^1_K$. Donc les composantes irréductibles de $\mathscr{Z}_s$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$. Par la théorie de Galois (cf. [S, chap.1, par. 7]) appliquée aux points génériques de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$, on voit que f n'est ramifié en aucun de ces points, que les quatre premiers cas correspondent à $\mathscr{Z}_s$ irréductible, et que les autres cas correspondent à $\mathscr{Z}_s$ ayant deux composantes. On a $\mathscr{C}_s/\langle\sigma\rangle \simeq \mathscr{Z}_s$.

Dans la suite de la démonstration, nous supposerons pour simplifier que $\operatorname{car}(k) \neq 2$.

(A) *Considérons d'abord le cas où $\mathscr{Z}_s$ est irréductible.* Alors $\mathscr{Z} \simeq \mathbb{P}^1_R$. Après extension de K, il existe une section Γ de $\mathscr{Z}$ sur R telle que f soit ramifié au-dessus du point Γ_η (on identifie une section avec son image), et que si $\mathscr{C}_s$ n'est pas lisse, Γ_s soit l'image d'un point double de $\mathscr{C}_s$. Soit $U = \mathscr{Z} - \Gamma$, on a $U = \operatorname{Spec} R[x]$, $f^{-1}(U)$ est un revêtement galoisien de degré 2 de U, il suit que $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} R[x, y]$ avec

$$y^2 = P(x), \quad P(x) \in R[x]. \tag{5}$$

Le morphisme f_η étant ramifié au-dessus du point $x = \infty$, on a $\deg P = 5$.

Si $\mathscr{C}_s$ est lisse, alors $\bar{P}(x)$ est un polynôme séparable de même degré que $P(x)$, il suit de la définition que $J_{10} \in R^*$ (voir [Ig, p. 621]), d'où (I). Si $\mathscr{C}_s$ n'est pas lisse, après changement de variable on a $P(x) = \pi x^5 + x^4 + ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in R$ et $\pi \in \mathfrak{m}$. Il suit que $\overline{J_{10}} = 0$, et après calculs

$$\overline{J_2} = -2\bar{a}, \quad \overline{J_4} = 2^{-3}(\bar{a}^2 - 4\bar{c}), \quad \overline{I_4} = \bar{a}^2 + 12\bar{c},$$
$$\overline{J_6} = 2^{-4}\bar{b}^2, \quad \overline{I_{12}} = 2^{-8}\operatorname{disc}(\bar{P}).$$

Dans le cas (II), la normalisation E de $\mathscr{C}_s$ est une courbe elliptique d'équation $y^2 = \bar{P}(x)$. Donc $\overline{I_{12}} \neq 0$, et $j(E) = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$. Dans le cas (III), on a $\overline{J_{10}} = \overline{I_{12}} = 0$, $\overline{I_4} \neq 0$. Et comme $\mathscr{C}_s$ est irréductible, on a $\overline{J_4}$ ou $\overline{J_6} \neq 0$. Enfin, dans le cas (IV), on a $\overline{J_{2i}} = 0$ pour tout $2 \leqq i \leqq 5$, donc $\overline{I_4} \neq 0$.

(B) *Considérons maintenant le cas où $\mathscr{Z}_s$ a deux composantes irréductibles.* Alors $\mathscr{Z}_s$ est réunion de deux droites projectives se coupant transversalement en un point. Après extension de K, il existe Γ_1, Γ_2 deux sections de $\mathscr{Z}$ telles que $(\mathscr{Z} - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))_s$ soit affine et connexe. Soit $U = \mathscr{Z} - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, alors on montre que $U = \operatorname{Spec} R[x, v]$ avec $xv = \pi^2$, où $\pi \in \mathfrak{m} - \{0\}$.

On peut choisir Γ_1 et Γ_2 contenus dans le lieu de ramification de f et dans le lieu de lissité de $\mathscr{C} \to \operatorname{Spec} R$. Il suit que, après extension de K, l'on a $U = \operatorname{Spec} R[x, v]$ avec $xv = \pi^2 \in \mathfrak{m} - \{0\}$, et $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} R[x, v, y, z]$ avec

$$y^2 = x^3 + ax^2 + x + b\pi^2 + \pi^2 v, \quad a, b \in R,$$
$$z^2 = v^3 + bv^2 + v + a\pi^2 + \pi^2 x, \quad yz = \pi(x^2 + ax + 1 + bv + v^2).$$

Les composantes irréductibles de $\mathscr{C}_s$ sont les complétés projectifs respectifs des courbes affines

$$y^2 = x^3 + \bar{a}x^2 + x, \quad z^2 = v^3 + \bar{b}v^2 + v.$$

Si la première composante (par exemple) est lisse, son invariant modulaire sera $2^8(\bar{a}^2 - 3)^3/(\bar{a}^2 - 4)$. Les calculs sur l'équation affine

$$w^2 = x^5 + ax^4 + x^3 + b\pi^2 x^2 + \pi^4 x$$

de C montrent que $J_{2i} \in R$, $I_2 - 2^{-4} \in \mathfrak{m}$ si $\operatorname{car}(k) \neq 3$, $I_6 - 1 \in \mathfrak{m}$ si $\operatorname{car}(k) = 3$ (voir (3)) et

$$I_4 - (a^2 - 3)(b^2 - 3)\pi^4 \in \pi^5 R, \quad J_{10} - 2^{-12}(a^2 - 4)(b^2 - 4)\pi^{12} \in \pi^{13} R$$
$$I_{12} - 2^{-10}\{4(a^2 - 3)^3(b^2 - 4) + 4(b^2 - 3)^3(a^2 - 4)$$
$$- 27(a^2 - 4)(b^2 - 4)\}\pi^{12} \in \pi^{13} R.$$

Les conclusions du théorème sont donc vérifiées pour les cas (V), (VI) et (VII).

Exemple 1. Soit C la courbe sur $\mathbb{Q}$ définie par l'équation: $y^2 + y = x^5$. On a $J_{2i} = 0$ pour tout $i \neq 5$ et $J_{10} = 5^5$. Donc C a potentiellement bonne réduction partout, ce qui se vérifie d'ailleurs facilement (cf. [B-M-MB, par. 4.1]).

Exemple 2. Soit C la courbe sur $\mathbb{Q}$ définie par l'équation: $y^2 = x^5 + x$. On a

$$J_2 = 5, \quad J_4 = 2^{-3} \cdot 15, \quad I_4 = -2^2 \cdot 5, \quad J_6 = -2^{-4} \cdot 5,$$
$$J_8 = -2^{-8} \cdot 325, \quad J_{10} = 2^{-4}, \quad I_{12} = -2 \cdot 25.$$

La courbe C a clairement bonne réduction en toute place différente de 2. D'après le théorème 1, la réduction stable $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ de C est la réunion de deux courbes elliptiques d'invariant modulaire nul. On peut encore construire à la main le modèle stable de C (sur une extension de $\mathbb{Q}$), mais cela n'est pas complètement immédiat.

Remarque 1. Pour une courbe C sur K définie par une équation $y^n = P(x)$, la connaissance des racines (avec multiplicité) de $P(x)$ détermine la courbe $\mathscr{C}_{\bar{s}}$, si $\operatorname{car}(k)$ ne divise pas n (voir [Bo] pour le cas $n = 2$). Mais dans la pratique, il n'est pas toujours aisé de trouver ces racines. Coleman a étudié le cas $n = \operatorname{car}(k)$ [C, par. 6], et a donné un algorithme efficace dans certaines situations.

Corollaire 1.1. *Les notations sont celles du théorème* 1. *Alors la fibre spéciale* $\mathscr{C}_s$ *est totalement dégénérée (i.e. toutes ses composantes irréductibles sont des courbes rationnelles) si et seulement si*

$$I_{12} I_4^{-3} \in \mathfrak{m}, \quad J_{10}^2 I_4^{-5} \in \mathfrak{m}, \quad J_{10}^{\varepsilon} I_{2\varepsilon} I_4^{-3\varepsilon} \in \mathfrak{m}.$$

Preuve. La situation totalement dégénérée est décrite par les cas (III), (IV), et (VII) du théorème 1. Les conditions ci-dessus sont clairement nécessaires. Inversement, si elles sont vérifiées, on voit cas par cas que $\mathscr{C}_s$ ne peut pas être de la forme (I), (II), (V) ou (VI).

Remarque 2. Soit F un corps algébriquement clos et complet pour une valeur absolue non-archimédienne. On peut alors munir canoniquement $\mathfrak{M}_g \times F$ d'une structure d'espace analytique rigide (cf. [F-vdP, III. 4.6]). Les courbes C sur F telles que la fibre spéciale du modèle stable soit totalement dégénérée sont appelées les courbes de Mumford. L'ensemble des points de $\mathfrak{M}_g \times F$ correspondant aux courbes de Mumford est un ouvert analytique. Pour $g = 2$, la structure analytique de cet ouvert est complétement déterminée, c'est le produit sur F de $\mathbb{A}^1_F$, d'un disque ouvert $E \subset \mathbb{A}^1_F$ et de $E-$ {un point} [He, Satz 6].

2 La spécialisation est surjective

Soit X un schéma, soient x, y deux points de X. On dit que x est *une spécialisation* de y ou que y *se spécialise* en x, si x appartient à l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de $\{y\}$. Soit X un schéma plat et localement de type fini sur Spec R. Si R est excellent, alors nous allons voir que tout point fermé de X_s est une spécialisation d'un point fermé de X_η (proposition 1). Ce résultat est sûrement bien connu, mais faute de le trouver dans la littérature, nous l'écrivons ici pour les besoins du par. 3.

Pour les notions utilisées dans le lemme 1, nous renvoyons à [F-vdP, II. 1 et II. 4.1]. Pour une algèbre de type fini D sur k, on note par Spm D la variété algébrique associée (i.e. on ne considère que les points fermés de Spec D).

Lemma 1 (Fresnel). *Supposons R complet. Soit $A = R[x_1, \ldots, x_n]/I$ une R-algèbre plate. Considérons l'algèbre affinoïde $B = K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$. Alors le morphisme canonique Φ : Spm $\overline{B} \to$ Spm $A \times_R k$ est fini surjectif.*

Preuve. Soit $\Phi^\# : A \otimes_R k \to \overline{B}$ l'homomorphisme canonique. Soient $f : K\langle x\rangle \twoheadrightarrow B$, $\bar{f} : k[x] \to \overline{B}$ les homomorphismes finis canoniques. Montrons que $(\operatorname{Ker} f) \cap R\langle x\rangle = I + \pi I R\langle x\rangle$.

Soit $g \in (\operatorname{Ker} f) \cap R\langle x\rangle = IK\langle x\rangle \cap R\langle x\rangle$. Soient $P_1, \ldots, P_m$ un système générateur de I sur $R[x]$. Alors il existe $Q_i \in K[x]$, $\varepsilon_i \in \pi R\langle x\rangle$ tels que

$$g = \sum_{1 \leq i \leq m} Q_i P_i + \sum_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i P_i .$$

Il suit que

$$\sum_{1 \leq i \leq m} Q_i P_i \in IK[x] \cap R\langle x\rangle = IK[x] \cap R[x] .$$

Comme A est sans torsion sur R, on a $IK[x] \cap R[x] = I$. Donc $g \in I + \pi I R\langle x\rangle$. Par conséquent $\overline{\operatorname{Ker} f} = I \otimes_R k$. Or $\ker \bar{f} = \sqrt{(\overline{\operatorname{Ker} f})}$, $\Phi^\#$ est composé de $k[x]/I \otimes k \to k[x]/\sqrt{I \otimes k}$ et de $k[x]/\sqrt{I \otimes k} \to \overline{B}$. Le deuxième homomorphisme étant fini injectif, Φ est bien surjectif.

Le lemma 1 implique le résultat suivant:

Lemma 2. *Supposons toujours R complet. Soient X un schéma plat localement de type fini sur R, U un ouvert dense de X. Alors tout point fermé x_s de X_s est la spécialisation d'un point fermé de U_η.*

Preuve. On peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine intègre et $U = X_f$ avec $f \in A$ non nul. Avec les notations du lemme 1, l'image de f dans B est non nul. Soit $y_s \in \Phi^{-1}(x_s) \subset \operatorname{Spm} \overline{B}$. Alors y_s est la spécialisation d'un point y_η de $\operatorname{Spm} B - V(f)$ (utiliser [T, theorem 6.4]). On peut supposer y_η rationnel sur K (quitte à faire une extension de K). On a donc une section $y^\# : B^\circ \to R$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_R K & \longrightarrow & B & \xrightarrow{y_\eta^\#} & K \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B^\circ & \xrightarrow{y^\#} & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_R k & \longrightarrow & \overline{B} & \xrightarrow{y^\#} & k \end{array}$$

induit un point de U_η qui se spécialise en x_s.

Proposition 1. *Soit R un anneau de valuation discrète excellent. Soient X un schéma plat de type fini sur R, U un ouvert dense de X. Alors tout point fermé x_s de X_s est la spécialisation d'un point fermé de U_η.*

Preuve. On se ramène aisément à R hensélien. Notons $\widehat{R}$ le complété de R et $\widehat{K} = \operatorname{Fr} \widehat{R}$. D'après le lemme 2, il existe une extension finie F de $\widehat{K}$ et un point $u \in U(F)$ qui se spécialise en x_s. Soit L une extension finie de K telle que $F \subset \widehat{L}$, après avoir remplacé K par L et R par sa clôture intégrale dans L, on peut supposer que $u \in U(\widehat{K})$. Par un théorème d'approximation (c'est là qu'intervient l'hypothèse R excellent), l'ensemble des points $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})$ pour la topologie sur X_η induite par celle de K (voir par exemple [B-L-R, 3.6/10, p.82]), donc il existe un point $x_\eta \in U_\eta$ qui se spécialise en x_s.

Remarque 3. Nous ne savons pas si l'hypothèse R excellent est indispensable dans la proposition 1.

3 Le schéma de modules $\mathfrak{M}_2$

Soient $\mathfrak{X} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[\underline{J}]$ (voir par. 0), $\overline{\mathfrak{M}}_2$ le schéma de modules (grossier) des courbes stables de genre 2 sur $\mathbb{Z}$. Ce sont des schémas propres (même projectifs) sur $\mathbb{Z}$, à fibres géométriques connexes, normales.

Soit s un point géométrique de Spec $\mathbb{Z}$. On utilisera les notations (cf. [Mu, pp. 315–319]) $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_{01}, \Delta_{00}, C_{000}$ et C_{001} pour désigner certaines parties fermées de $(\overline{\mathfrak{M}}_2)_s$. Plus précisément: Δ_0 est l'adhérence dans $(\overline{\mathfrak{M}}_2)_s$ du lieu des courbes irréductibles singulières; $\triangle_1$ est le lieu des courbes stables ayant deux composantes qui se coupent en un point; $\triangle_{01} = \triangle_0 \cap \triangle_1$; $\triangle_{00} \subset \triangle_0$ est le lieu des courbes stables dont les composantes sont rationnelles; C_{000} correspond à la courbe stable qui est réunion de deux droites projectives se coupant en trois points; et C_{001} correspond à la courbe stable qui est réunion de deux droites rationnelles singulières qui se coupent en un point. Les fermés $\triangle_0$, $\triangle_1$ sont deux diviseurs de $(\overline{\mathfrak{M}}_2)_s$ à croisement normal.

Soient $\varphi : \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{X}$ le morphisme birationnel induit par (1), on peut le considérer comme une application rationnelle de $\overline{\mathfrak{M}}_2$ dans $\mathfrak{X}$. On a le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ engendré par $I_4^{36}, J_{10}^{12}, I_{12}^{12}$. Soit $\varrho : \widetilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{X}$ de centre $\mathcal{J}$. Alors l'application rationnelle $\varphi : \overline{\mathfrak{M}}_2 \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme, elle induit un unique morphisme birationnel fini $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathfrak{M}}_2 \to \widetilde{\mathfrak{X}}$ tel que $\varphi = \varrho \circ \widetilde{\varphi}$. Ainsi $\overline{\mathfrak{M}}_2$ est isomorphe à la normalisation de $\widetilde{\mathfrak{X}}$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que φ est définie partout, que $\varphi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{M}}_2}$ est inversible, et que le morphisme canonique $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathfrak{M}}_2 \to \widetilde{\mathfrak{X}}$ induit par φ est à fibres finies. Ce qui revient à dire que pour tout nombre premier $p \geqq 2, \varphi \times \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ vérifie ces propriétés. Soit $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}^{\mathrm{sh}}$ l'hensélisé strict de $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$, il est fidèlement plat sur $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$, donc il suffit que ces propriétés soient vérifiées pour $\varphi \times \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}^{\mathrm{sh}}$. Fixons donc un $p \geqq 2$, notons $R = \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}^{\mathrm{sh}}$, $X = \mathfrak{X} \times R$, $M = \mathfrak{M}_2 \times R$, $\overline{M} = \overline{\mathfrak{M}}_2 \times R$, et $\varphi \times R$ toujours par φ. Comme $\overline{M}$ et X sont propres sur R, il suffit de montrer que pour tout point fermé $q \in \overline{M}_s, \varphi$ est définie en $q, (\varphi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\overline{M}})_q$ est inversible, et que $\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{\varphi}(q))$ est finie.

(a) *L'application rationnelle φ est définie partout.* Soit $q \in \overline{M}_s - M_s$ un point fermé, il correspond à une courbe stable singulière $\mathscr{C}_s$ sur k. Soit U l'un des ouverts affines $D_+(I_{12}), D_+(I_4)$ ou $D_+(I_{2\varepsilon})$, selon que $\mathscr{C}_s$ est de la forme (II), (III)-(IV), ou (V$_*$) (voir théorème 1). Pour que φ soit définie en q, il suffit qu'en identifiant les corps de fonctions $\mathscr{K}(\overline{M})$ et $\mathscr{K}(X)$, on ait $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_{\overline{M},q}$. Ce qui revient à dire que pour toute fonction rationnelle $h \in \mathcal{O}_X(U) \subset \mathscr{K}(\overline{M})$, q n'appartient pas à Supp $(h)_\infty$, le support du diviseur des pôles de h sur $\overline{M}$ (le schéma $\overline{M}$ étant normal, il s'agit ici de diviseur de Weil).

Prenons d'abord $q \in \triangle_0 - (\triangle_{00} \cup \triangle_{01})$, donc $U = D_+(I_{12})$. Soient $g = I_{12}^5 J_{10}^{-6} \in \mathcal{O}_{\overline{M}}(M), V(g)$ le fermé de M associé à g. Alors pour tout $h \in \mathcal{O}_X(U)$, on a

$$\mathrm{Supp}(h)_\infty \cap \overline{M}_s = (\overline{\mathrm{Supp}(h|_M)_\infty} \cap \overline{M}_s) \cup \triangle \subset \overline{V(g)} \cup \triangle$$

où $\triangle \in \{\emptyset, \triangle_0, \triangle_1, \triangle_0 \cup \triangle_1\}$ et "$\overline{}$" signifie adhérence dans $\overline{M}$. Si $q \in \overline{V(g)}$, alors il est la spécialisation d'un point de $V(g) \cap M_\eta$ (appliquer la proposition 2 avec $X = \overline{V(g)}$ et $U = V(g)$, X étant plat sur R). Il existe donc un anneau de valuation discrète R' dominant R, et une courbe stable $\mathscr{C}$ sur R' telle que $\mathscr{C}_s = q$ et $\mathscr{C}_\eta \in V(g) \times \mathrm{Fr}(R')$. Donc la valeur de I_{12} en $\mathscr{C}_\eta$ est nulle, ce qui est impossible d'après le théorème 1, (II). Donc $q \notin \overline{V(g)}$. Il reste à montrer maintenant que $\triangle_0 \not\subset \mathrm{Supp}(h)_\infty$. Sinon, $\triangle_0 - \mathrm{Supp}(h)_0$ est un ouvert non vide de $\triangle_0$, où $(h)_0$ est le diviseur des zéros de h sur $\overline{M}$. Soit $q' \in \triangle_0 - (\mathrm{Supp}(h)_0 \cup \triangle_{00} \cup \triangle_{01})$, alors $h^{-1} \in \mathfrak{m}_{q'}$, idéal maximal de $\mathcal{O}_{\overline{M},q'}$. Il existe une courbe stable $\mathscr{D}$ sur R telle que

$\mathscr{D}_\eta \in M_\eta$ et $\mathscr{D}_s = q'$. On a donc une section $\theta : \operatorname{Spec} R \to \overline{M}$ qui envoie le point générique sur $\mathscr{D}_\eta$ et le point fermé sur q'. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\overline{M},q'} & \xrightarrow{\theta^\#} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_{\overline{M},\mathscr{D}_\eta} & \xrightarrow{\theta_\eta^\#} & K \end{array}$$

implique que $\theta_\eta^\#(h^{-1}) \in \mathfrak{m}$, c'est-à-dire que la valeur de h^{-1} en $\mathscr{D}_\eta$ appartient à $\mathfrak{m}$. Or c'est impossible d'après le théorème 1. D'où $q \notin \operatorname{Supp}(h)_\infty$, donc φ est définie en q.

Si $q \in \Delta_{00} - (\Delta_{00} \cup \Delta_{01})$, on se ramène comme ci-dessus à montrer que pour tout $h \in \mathscr{O}_X(D_+(I_4))$, on a $\Delta_0 \not\subset \operatorname{Supp}(h)_\infty$. Supposons le contraire: $\Delta_0 \subset \operatorname{Supp}(h)_\infty = \operatorname{Supp}(h^{-1})_0$, et écrivons $h = aI_4^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et a homogène de degré $4n$. On a $(I_4^3 I_{12}^{-1})^n = (h^{-1})^3(a^3 I_{12}^{-n})$, donc $\Delta_0 \subset \operatorname{Supp}(I_4^3 I_{12}^{-1})_0$. Cela implique que pour toute courbe stable $\mathscr{C}_s \in \Delta_0 - (\Delta_{00} \cup \Delta_{01})$, la normalisation de $\mathscr{C}_s$ est une courbe elliptique d'invariant modulaire nul (voir théorème 1, (II)). Ce qui est clairement faux. Par conséquent $\Delta_0 \not\subset \operatorname{Supp}(h)_\infty$ et φ est définie en q.

Si $q \in \Delta_1$, comme précédemment, on se ramène à démontrer que pour tout $h \in \mathscr{O}_X(D_+(I_{2\varepsilon}))$, on a $\Delta_1 \not\subset \operatorname{Supp}(h)_\infty$ et $\Delta_0 \not\subset \operatorname{Supp}(h)_\infty$ (lorsque $q \in \Delta_{01}$). La première propriété est immédiate. La seconde se démontre comme pour les points de $\Delta_{00} - (\Delta_{00} \cap \Delta_1)$, en construisant explicitement des courbes stables $q' \in \Delta_0 - (\Delta_{00} \cup \Delta_{01})$ vérifiant $I_{2\varepsilon}^6 I_{12}^{-\varepsilon}(q') \neq 0$.

(b) *Le faisceau d'idéaux* $\varphi^{-1}.\mathscr{J} \cdot \mathscr{O}_{\overline{M},q}$ *est inversible en tout point* $q \in \overline{M}_s$. On a $\varphi^{-1}(V(\mathscr{J})) \cap \overline{M}_s = \Delta_1$. Donc il suffit de considérer les points $q \in \Delta_1$. Soit $I_{24} := 19J_8^3 - 2J_6^4 \in \mathbb{Z}[\underline{J}]$. On voit que $V(\mathscr{J}) \subset D_+(I_{24})$. Soient $f_1 = I_4^{36} I_{24}^{-6}$, $f_2 = J_{10}^{12} I_{24}^{-5}$ et $f_3 = I_{12}^{12} I_{24}^{-6}$. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on montre que les fonctions rationnelles $f_1 f_2^{-1}, f_3 f_2^{-1}$ (resp. $f_1 f_3^{-1}, f_2 f_3^{-1}$; resp. $f_2 f_1^{-1}, f_3 f_1^{-1}$) sont régulières en q si $q \in \Delta_1 - \Delta_{01}$ (resp. si $q \in \Delta_{01} - \{C_{001}\}$; resp. si $q = C_{001}$). Donc $\varphi^{-1}\mathscr{J} \cdot \mathscr{O}_{\overline{M},q}$ est inversible.

(c) *Le morphisme* $\widetilde{\varphi} : \overline{M} \to \widetilde{X}$ *est à fibres finies sur* $\overline{M}_s$. Sur Δ_1, les courbes stables $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$ sont déterminées par les invariants modulaires $(j_1, j_2) \in \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ de leurs composantes irréductibles. Il suit du théorème 1, (V)–(VII), que $\widetilde{\varphi}|_{\Delta_1}$ est à fibres finies. D'autre part, en utilisant les calculs de la démonstration du théorème 1, on voit aisément que $\widetilde{\varphi}|_{\overline{M}_s - \Delta_1}$ est à fibres finies (on peut voir en fait que $\widetilde{\varphi}$ est bijective). Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Corollaire 2.1. *Soit Γ_1 le fermé de $\overline{\mathfrak{M}}_2$ tel que pour tout corps algébriquement clos L, $\Gamma_1 \times L$ soit le lieu des courbes stables de genre 2 sur L qui sont réunions de deux composantes se coupant en un seul point. Alors φ induit un isomorphisme $\overline{\mathfrak{M}}_2 - \Gamma_1 \simeq \mathfrak{X} - V(\mathscr{J})$.*

Théorème 3. *Soit S le schéma* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$*; (resp.* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$*; resp.* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$*). Soit $\mathscr{J}$ le faisceau d'idéaux sur $\mathscr{X} \times S$ engendré par I_4^3, J_{10}, I_{12} (resp. par $I_4^{12}, J_{10}^3, I_{12}^4$;*

resp. par $I_4^{12}, J_{10}^4, I_{12}^4$ *). Alors* $\varphi \times \mathrm{Id}_S : \mathfrak{M}_2 \times S \to \mathfrak{X} \times S$ *induit un unique morphisme birationnel fini de* $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times S$ *sur l'éclatement de* $\mathfrak{X} \times S$ *de centre* $\mathscr{J}$.

Preuve. Notons $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \times S$ l'éclatement de centre $\mathscr{J}$ et conservons les notations du théorème 2. Alors l'injection canonique $\mathscr{H}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}\times S} \subset \mathscr{J}$ induit un morphisme $\mathfrak{Y} \to (\mathfrak{X} \times S)^{\sim}$, où $(\mathfrak{X} \times S)^{\sim} \simeq \widetilde{\mathfrak{X}} \times S$ est l'éclatement de $\mathfrak{X} \times S$ de centre $\mathscr{H}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}\times S}$. Compte tenu du fait que $V(\mathscr{H}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}\times S})$ est contenu dans l'ouvert principal de $\mathfrak{X} \times S$ associé à J_2 (resp. J_6; resp. J_8) si $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ (resp. Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$; resp. Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$), on voit immédiatement que $\mathfrak{Y} \to \widetilde{\mathfrak{X}} \times S$ est un morphisme fini birationnel. Comme $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times S$ est normal, $\widetilde{\varphi} \times \mathrm{Id}_S$ induit un morphisme fini de $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times S$ sur $\mathfrak{Y}$.

Corollaire 3.1. *Soit k un corps, soit $\mathscr{J}_k$ le faisceau d'idéaux sur $\mathfrak{X} \times k$ engendré par* I_4^3, J_{10}, I_{12} *si* $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$; *par* $I_4^9, J_{10}^3, J_{12}^3$ *si* $\mathrm{car}(k) = 3$; *et par* $I_4^{12}, J_{10}^4, I_{12}^4$ *si* $\mathrm{car}(k) = 2$. *Alors* $\varphi \times k : \mathfrak{M}_2 \times k \to \mathfrak{X} \times k$ *induit un isomorphisme de* $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times k$ *sur la normalisation de l'éclatement de* $\mathfrak{X} \times k$ *de centre* $\mathscr{J}_k$.

Preuve. Soit $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ (resp. Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$; resp. Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$) si $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$ (resp. si $\mathrm{car}(k) = 3$; resp. si $\mathrm{car}(k) = 2$). Soit $\mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathfrak{X} \times S$ de centre $\mathscr{J}$, et $(\mathfrak{X} \times k)^{\sim}$ l'éclatement de $\mathfrak{X} \times k$ de centre $\mathscr{J}_k$. On a un morphisme canonique $(\mathfrak{X} \times k)^{\sim} \to \mathfrak{Y} \times k$ qui est une immersion fermée. Comme les deux variétés sont intègres et birationnelles, on a un isomorphisme.

Corollaire 3.2. *Notons* $H_6 = J_2^3 - 2^4 \cdot 3^3 J_6 - 3J_2I_4 \in \mathbb{Z}[\underline{J}]$. *Soit T un schéma sur Spec* $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$. *Alors* $\varphi \times \mathrm{Id}_T : \mathfrak{M}_2 \times T \to \mathfrak{X} \times T$ *induit un isomorphisme de* $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times T$ *sur l'éclatement de* $\mathfrak{X} \times T$ *de centre l'idéal engendré par* I_4^3, J_{10}, H_6^2 *et* $I_4^2 H_6$.

Preuve. On a $I_{12} = 2^{-8}3^{-3}(4I_4^3 - H_6^2)$. On montre que l'éclatement ci-dessus donne la normalisation de $\widetilde{\mathfrak{X}} \times T$.

Remarque 4. Soit $\mathfrak{H}_g^*$ le quotient du demi-plan supérieur de Siegel de degré g par le groupe simplectique $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, c'est l'espace de modules (grossier) des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Soient $\overline{\mathfrak{H}_g^*}$ sa compactification de Satake, $\widetilde{\mathfrak{H}_g^*}$ la normalisation de l'éclatement de $\overline{\mathfrak{H}_g^*}$ le long de $\overline{\mathfrak{H}_g^*} - \mathfrak{H}_g^*$. Namikawa a démontré que le morphisme canonique $\mathfrak{M}_g \times \mathbb{C} \to \mathfrak{H}_g^*$ se prolonge en un morphisme de $\widetilde{\mathfrak{M}_g} \times \mathbb{C}$ sur $\widetilde{\mathfrak{H}_g^*}$, et que ce dernier est un isomorphisme pour $g = 2$ [N, par. 6 et par 9].

On peut noter que si Γ_0 désigne l'adhérence du lieu des courbes stables à fibres géométriques singulières irréductibles, alors $\overline{\mathfrak{M}}_2 - \Gamma_0$ est isomorphe au schéma de modules des schémas abéliens principalement polarisés sur $\mathbb{Z}$.

Soit k un corps algébriquement clos. Le corollaire 3.1 permet d'étudier la structure locale de $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times k$, par exemple le lieu de ses singularités. Considérons les points suivants de $\overline{M}_2 \times k$:

(a) $q_* \in \mathfrak{M}_2 \times k$ les points vérifiant $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} \neq 0$;

(b) $q_1 \in \triangle_0 - (\triangle_{00} \cup \triangle_{01})$ tel que $J_2 = J_4 = J_8 = J_{10} = 0$ et $J_6 \neq 0$, si car$(k) \neq 3$;

(c) $q_2 \in \triangle_0 - (\triangle_{00} \cup \triangle_{01})$ tel que $J_2 = J_6 = J_{10} = 0$, $J_4 \neq 0$ si car$(k) \neq 2$;

(d) $q_{**} \in \triangle_1$ les points correspondant aux courbes stables dont l'une des composantes irréductibles est d'invariant modulaire $j = 0$ ou $j = 1728$.

Si car$(k) \neq 2$, alors il y a un unique point de la forme q_*, il correspond à la courbe de l'exemple 1 si car$(k) \neq 5$, et à la courbe d'équation $y^2 = x^5 - x$ si car$(k) = 5$; si car$(k) = 2$, ces points forment un fermé de dimension 1, ils sont représentés par les courbes d'équation $y^2 - y = x^5 + ax^3$, $a \in k$. Si car$(k) \neq 2$ et 3, alors q_1 correspond à la courbe définie par l'équation $y^2 = x^2(x^3 + 1)$; si car$(k) = 2$, il correspond à la courbe d'équation $y^2 - xy = x^5$. La normalisation de la courbe q_1 est une courbe elliptique d'invariant modulaire nul. Si car$(k) \neq 2$, q_2 correspond à la courbe $y^2 = (x-1)^2(x^3 + x)$. Sa normalisation est une courbe elliptique d'invariant modulaire 1728. Toutes ces courbes ont de "gros" groupes d'automorphismes.

Corollaire 3.3. *Soit k un corps algébriquement clos. Alors les points singuliers de $\overline{\mathfrak{M}}_2 \times k$ sont les points q_*, q_1, q_2 et les q_{**} décrits ci-dessus.*

Remarque 5. Le lieu singulier de $\mathfrak{M}_g \times k$ est connu pour tout $g \geqq 2$ et tout corps algébriquement clos k [Lø], celui de $\overline{\mathfrak{M}}_g \times \mathbb{C}$ est connu pour tout $g \geqq 4$ [Mo]. D'autre part, le corollaire ci-dessus est obtenu par calcul direct, mais il devrait être possible de l'obtenir en étudiant l'action du groupe d'automorphismes des courbes C (comme par exemple dans [Lø, par. 1]).

4 Les groupes des automorphismes des courbes stables de genre 2

Dans cette section, *k sera un corps algébriquement clos*. On étudie le groupe des k-automorphismes $\mathrm{Aut}_k(X)$ d'une courbe stable X de genre 2 sur k. On s'intéresse plus particulièrement aux ordres des éléments de $\mathrm{Aut}_k(X)$. Dans la suite du paragraphe, on notera ce groupe par $\mathrm{Aut}(X)$.

4.1 Les cas où X est lisse. Le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ est bien connu [Ig, par. 8]. Nous nous bornons à rappeler quelques résultats en car$(k) \neq 2$. Soit C_0 la courbe sur k d'équation $y^2 = x^5 - 1$ si car$(k) \neq 5$ et $y^2 = x^5 - x$ si car $(k) = 5$. Elle est caractérisée par $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, et $J_{10} \neq 0$. Si car$(k) \neq 5$, on considère aussi la courbe C_1 sur k d'équation $y^2 = x^5 - x$, elle est caractérisée par $J_2 \neq 0, J_4 J_2^{-2} = 2^{-3} \cdot 5^{-1} \cdot 3$, $J_6 J_2^{-3} = -2^{-4} \cdot 5^{-2}$, et $J_{10} J_2^{-5} = 2^{-4} \cdot 5^{-5}$. On voit d'après le tableau d'Igusa (loc. cit.) que:

4.1.1. Si X n'est isomorphe ni à C_0 ni à C_1, alors les éléments de $\mathrm{Aut}(X)$ sont d'ordre divisant 4 ou 6;

4.1.2. Si car$(k) \neq 5$, alors les éléments de $\mathrm{Aut}(C_1)$ sont d'ordre divisant 6 ou 8;

4.1.3. Si car$(k) \neq 5$, alors $\mathrm{Aut}(C_0) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$;

4.1.4. Si car$(k) = 5$, $\mathrm{Aut}(C_0)$ est extension de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4.2. Le cas où X est de la forme (V_*). Soient X_1, X_2 les composantes irréductibles de X, p leur point d'intersection. Notons $\mathrm{Aut}_p(X_i)$ les automorphismes de X_i laissant invariant p. Comme X_i est une courbe stable de genre 1, $\mathrm{Aut}_p(X_i)$ est parfaitement connut en fonction de son invariant modulaire. On a:

4.2.1. Si $X_1 \not\simeq X_2$, alors $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}_p(X_1) \times \mathrm{Aut}_p(X_2)$;

4.2.2. Si $X_1 \simeq X_2$, alors $\mathrm{Aut}(X)$ est produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le sous-groupe normal $\mathrm{Aut}_p(X_1) \times \mathrm{Aut}_p(X_2)$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par la permutation des deux composantes de X.

4.3. Les cas où X est de la forme (IV). On a: $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathscr{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond à la permutation des deux composantes de X, et $\mathscr{S}_3$ correspond aux permutations des trois points d'intersection de X.

4.4. Le cas où X est de la forme (III). Comme pour le cas suivant, X est définie par une équation $y^2 + Q(x)y = P(x)$. Notons J_{2i} les invariants de X associés à une telle équation. Alors $J_{10} = I_{12} = 0$. On a:

4.4.1. Si $J_6 \neq 0$, alors $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

4.4.2. Si $J_6 = 0$ (cela implique que $\mathrm{car}(k) \neq 2$), alors $\mathrm{Aut}(X)$ est produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le premier groupe correspond au groupe de permutations des deux points singuliers de X;

4.5. Le cas où X est de la forme (II). On a $J_{10} = 0$ et $I_{12} \neq 0$. Soit j l'invariant modulaire de la normalisation de X. On a:

4.5.1. Si $j \neq 0, 1728$, alors

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_6 = 0; \end{cases}$$

4.5.2. Si $j = 1728$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$, alors

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_2 \neq 0, J_6 = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } J_2 = J_6 = 0; \end{cases}$$

4.5.3. Si $j = 0$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$, alors

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_2 \neq 0, J_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_6 = 0 \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si } J_2 = 0; \end{cases}$$

4.5.4 Si $j = 0$ et $\mathrm{car}(k) = 3$, alors

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } J_6 = 0, \end{cases}$$

il est à remarquer que dans ce cas-là, 3 ne divise pas le cardinal de $\mathrm{Aut}(X)$;

4.5.5. Si $j = 0$ et $\mathrm{car}(k) = 2$, alors

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } J_8 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si } J_8 = 0 . \end{cases}$$

Preuve. Montrons par exemple 4.5.5. Soient $Y \to X$ la normalisation de X, p_1 et p_2 les points de Y au-dessus du point double de X. Alors

$$\mathrm{Aut}(X) = \{\tau \in \mathrm{Aut}(Y) \mid \tau(\{p_1, p_2\}) = \{p_1, p_2\}\} .$$

Soit $G_0 = \{\tau \in \mathrm{Aut}(Y) \mid \tau(p_1) = p_1, \tau(p_2) = p_2\}$, alors $\mathrm{Aut}(X) \simeq G_0 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par l'involution hyperelliptique σ de X. Fixons un point invariant ∞ de σ ($\in \mathrm{Aut}(Y)$) comme élément neutre de Y, alors $\sigma(y) = -y$. Le groupe G_0 est conjugué du groupe $G_1 = \{\tau \in \mathrm{Aut}(Y) \mid \tau(2p_1) = 2p_1\}$. Il ne reste plus qu'à déterminer ce dernier. Dans le cas 4.5.5, X a une équation

$$X : \quad y^2 + xy = x^5 + ax^3, \quad a \in k,$$

donc $J_2 = J_4 = J_{10} = 0$, $J_6 \neq 0$ et $J_8^3 J_6^{-4} = a^{24}$. La courbe Y a pour équation

$$Y : \quad z^2 + z = x^3 + ax,$$

et on a $x(p_1) = z(p_1) = 0$, donc $x(2p_1) = a^2$, $z(2p_1) = a^3 + 1$. Le groupe $\mathrm{Aut}_\infty(Y)$ étant bien connu, on vérifie que si $a \neq 0$ (donc $J_8 \neq 0$), alors $G_1 = \{1\}$, donc $\mathrm{Aut}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $a = 0$, alors $G_1 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est engendré par $z \mapsto z, x \mapsto \omega x$, où $\omega \in k$ est une racine primitive cubique de 1.

5 Les épaisseurs des points singuliers

Supposons que k soit séparablement clos et que C soit la fibre générique lisse d'une courbe stable $\mathscr{C}$ sur R. Notons $\nu : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation normalisée de K. Soit q un point singulier de $\mathscr{C}_s$, alors q est rationnel sur k et le complété $\mathfrak{m}_q$-adique de $\mathscr{O}_{\mathscr{C},q}$ vérifie

$$\hat{\mathscr{O}}_{\mathscr{C},q} \simeq \widehat{R}[[u,v]]/(uv - \pi), \quad \pi \in \mathfrak{m} - \{0\} .$$

Définition 2. On appelle *épaisseur de* q l'entier $\nu(\pi) \in \mathbb{N}$, et on le note $e(q)$. Il est appelé "degré de singularité local" dans [V, 3.10].

Soit H_g le schéma de Hilbert des courbes stables $f : X \to \mathrm{Spec}\, R$ de genre g sur R, munies d'un isomorphisme $\mathbb{P}_R^{5g-6} \simeq \mathbb{P}(f_*(\omega_{X/R}^{\otimes 3}))$, où $\omega_{X/R}$ est le faisceau dualisant de X (cf. [D-M, par. 1]). Soit S^* le diviseur de H_g correspondant aux courbes stables singulières. Notons $\varrho : \mathrm{Spec}\, R \to H_g$ une section induite par $\mathscr{C}$, s le point fermé de Spec R. On a $\varrho(s) \in S^*$ si $\mathscr{C}_s$ est singulière.

Lemme. *Conservons les notations ci-dessus. Soient $q_1, \ldots, q_r$ les points singuliers de $\mathscr{C}_s$, d'épaisseurs respectives $e(q_1), \ldots, e(q_r)$, et t une équation minimale de S^* en $\varrho(s)$. Alors $\sum_{i=1}^{r} e(q_i) = \nu(\varrho^\#(t))$. C'est donc le degré du diviseur $\varrho^*(S^*)$ sur Spec R.*

Preuve. Soit $Z_g \to H_g$ la courbe stable universelle. La section ϱ induit un isomorphisme $\mathscr{C} \simeq Z_g \times_{H_g} \operatorname{Spec} R$. On a

$$\widehat{\mathscr{O}}_{Z_g, q_i} \simeq \widehat{R}[[t_1, \dots, t_N, u_i, v_i]]/u_i v_i - t_i)$$

[D-M, theorem 1.6]. On en déduit que

$$\widehat{\mathscr{O}}_{\mathscr{C}, q_i} \simeq \widehat{R}[[u_i, v_i]]/(u_i v_i - \widehat{\varrho}^{\#}(t_i)),$$

où $\widehat{\varrho}^{\#} : \widehat{\mathscr{O}}_{H_g, \varrho(s)} \to \widehat{R}$ est induit par ϱ. Il suit que $e(q_i) = \nu(\widehat{\varrho}^{\#}(t_i))$. Or S^* est définie par $t_1 \dots t_r = 0$ dans $\widehat{\mathscr{O}}_{H_{g, \varrho(s)}}$, ce qui démontre le lemme.

Dans la proposition suivante, on calcule les épaisseurs des points singuliers de $\mathscr{C}_s$ (lorsque $g(C) = 2$) en fonction des invariants J_{2i} de C. Ce résultat se trouve partiellement dans [Me, par. 1.4]. C'est d'ailleurs la lecture de ce dernier qui nous a poussés à achever le travail.

La connaissance des épaisseurs détermine le modèle minimal $\mathscr{X}$ de C sur R par éclatements successifs de $\mathscr{C}$ (voir la preuve de la proposition 2.2 de [D]). Soient $\mathscr{J}$ le modèle de Néron de la Jacobienne de C [B-L-R, p.12], $\mathscr{J}^{\circ}$ la composante neutre de $\mathscr{N}$, alors d'après Raynaud (loc. cit., par. 9.5, theorem 4) on a

$$\mathscr{N}_s^{\circ} \simeq \operatorname{Pic}^{\circ}_{\mathscr{X}_s/k}.$$

Il suit que si $\mathscr{C}_s$ est de la forme (III), (IV) ou (VII), alors $\mathscr{J}_s^{\circ} \simeq \mathbb{G}_{m,k}^2$; dans les cas (II) et (VI), $\mathscr{N}_s^{\circ}$ est extension d'une courbe elliptique (d'invariant modulaire $\overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$) par $\mathbb{G}_{m,k}$; enfin dans le cas (V), $\mathscr{J}_s^{\circ}$ est produit de deux courbes elliptiques dont les invariants modulaires sont déterminés par le théorème 1, (V). D'autre part, le groupe des composantes connexes Φ de $\mathscr{J}_s$ peut être calculé à partir de la matrice de monodromie $M \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ de $\mathscr{X}$ (qui est donnée explicitement dans [N-U] en fonction du type de $\mathscr{X}$) : $\Phi = \prod_i (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$ où les d_i sont les éléments non nuls d'une matrice diagonale équivalente (dans $\mathbb{Z}$) à $M - \mathrm{Id}$ [Lo-2, remark 2.2].

Proposition 2. *Supposons k séparablement clos. Soient $\mathscr{C}$ une courbe stable de genre 2 sur $R, C = \mathscr{C}_\eta$, et J_{2i} les invariants d'une équation de C. Soient $\mathscr{X}$ le modèle minimal de C sur R, $\mathscr{N}$ le modèle de Néron de la Jacobienne de C et Φ le groupe des composantes connexes de $\mathscr{N}_s$. On a*

(i) *Si $\mathscr{C}_s$ est lisse, alors $\mathscr{X} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{J}_s$ est la Jacobienne de $\mathscr{C}_s$;*

(ii) *Si $\mathscr{C}_s$ est de la forme* (II), *alors l'épaisseur du point singulier de $\mathscr{C}_s$ est $e = \frac{1}{6}\nu(J_{10}^6 I_{12}^{-5})$, $\mathscr{X}$ est du type $[\mathrm{I}_{e-0-0}]$ (selon les notations de [N-U]) et $\Phi = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$;*

(iii) *Si $\mathscr{C}_s$ est de la forme* (III) *alors les épaisseurs $e_1 \leqq e_2$ des points singuliers de $\mathscr{C}_s$ sont*

$$e_1 = \inf\left\{\nu(I_{12}I_4^{-3}), \frac{1}{4}\nu(J_{10}^2 I_4^{-5})\right\}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\nu(J_{10}^2 I_4^{-5}) - e_1,$$

$\mathscr{X}$ est du type $[\mathrm{I}_{e_1 - e_2 - 0}]$ et $\Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}$;

(iv) *Si* $\mathscr{C}_s$ *est de la forme* (IV), *soient* $e_1 \leqq e_2 \leqq e_3$ *les épaisseurs des points singuliers de* $\mathscr{C}_s$. *Posons* $l = \nu(J_{10}J_2^{-5})$, $n = \nu(I_{12}J_2^{-6})$ *et* $m = \nu(J_4J_2^{-2})$. *Alors*

$$e_1 = \inf\left\{\frac{l}{3}, \frac{n}{2}, m\right\}, \quad e_2 = \inf\left\{\frac{l - e_1}{2}, n - e_1\right\}, \quad e_3 = l - e_1 - e_2\,,$$

$\mathscr{X}$ *est du type* $[\mathrm{I}_{e_1 - e_2 - e_3}]$ *et* $\Phi = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$, *où* $d_1 = \mathrm{pgcd}(e_1, e_2, e_3)$, $d_1d_2 = e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3$;

(v) *Si* $\mathscr{C}_s$ *est de la forme* (V), *alors l'épaisseur du point singulier de* $\mathscr{C}_s$ *est (voir (3) pour les notations)*

$$e = \frac{1}{12\varepsilon}\nu(J_{10}^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}^{-5})\,,$$

$\mathscr{X}$ *est du type* $[\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_0 - e]$ *et donc* $\Phi = \{0\}$;

(vi) *Si* $\mathscr{C}_s$ *est de la forme* (VI), *soient* e_0 *l'épaisseur du point d'intersection des deux composantes de* $\mathscr{C}_s$ *et* e_1 *l'épaisseur de l'autre point singulier. Alors*

$$e_0 = \frac{1}{12\varepsilon}\nu(I_{12}^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}^{-6}), \quad e_1 = \frac{1}{\varepsilon}\nu(J_{10}^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}I_{12}^{-\varepsilon})\,,$$

$\mathscr{X}$ *est du type* $[\mathrm{I}_{e_1} - \mathrm{I}_0 - e_0]$ *et* $\Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z}$;

(vii) *Si* $\mathscr{C}_s$ *est de la forme* (VII), *soient* e_0 *l'épaisseur du point d'intersection des deux composantes de* $\mathscr{C}_s$ *et* $e_1 \leqq e_2$ *les épaisseurs des autres points singuliers. Alors*

$$e_0 = \frac{1}{4\varepsilon}\nu(I_4^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}^{-2})\,,$$

$$e_1 = \inf\left\{\nu(I_{12}I_4^{-3}), \frac{1}{2\varepsilon}\nu(J_{10}^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}I_4^{-3\varepsilon})\right\}, \quad e_2 = \frac{1}{\varepsilon}\nu(J_{10}^{\varepsilon}I_{2\varepsilon}I_4^{-3\varepsilon}) - e_1\,,$$

$\mathscr{X}$ *est du type* $[\mathrm{I}_{e_1} - \mathrm{I}_{e_2} - e_0]$ *et* $\Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}$.

Preuve. Il est clair que les résultats ne dépendent pas du corps de base K, ni d'une équation $y^2 = P(x)$ de C. Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, ou si $\mathrm{car}(k) = 2$ mais $\mathscr{C}_s$ n'est pas la réunion de deux courbes elliptiques d'invariant modulaire nul, on peut trouver une équation simple de C sur K^{alg} et obtenir les épaisseurs par calculs directs (de la même façon que pour le théorème 1). Traitons deux cas représentatifs.

Supposons d'abord $\mathrm{car}(k) \neq 2$ et que $\mathscr{C}_s$ soit réunion de deux droites projectives se coupant en trois points. Quitte à faire une extension de K et un changement de variables, on peut supposer que C est définie à partir d'une équation

$$y^2 = x(x - 2a)(x - 1)(x - 1 - 2b)(2cx - 1), \quad 0 < \nu(a) \leqq \nu(b) \leqq \nu(c) < +\infty\,.$$

Soit $q \in \mathscr{C}_s$ la spécialisation du point $(x = 0, y = 0) \in C$. Il existe $w \in \widehat{\mathscr{O}}_{\mathscr{C},q}$ tel que $w^2 = (x - 1)(x - 1 - 2b)(2cx - 1)$. Posons $u = yw^{-1} - x + a$, $v = -yw^{-1} - x + a$.

Alors $uv = a^2$, et $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathscr{C},q} = \widehat{R}[[u,v]]$. Il suit que $e_1 = \nu(a^2)$, et $e_2 = \nu(b^2)$, $e_3 = \nu(c^2)$. Calculons les invariants de C avec l'équation ci-dessus:

$$J_2 \in 1 + \mathfrak{m}, \quad J_4 \in 2^{-2}(a^2(1+\mathfrak{m}) + b^2(1+\mathfrak{m}) + c^2(1+\mathfrak{m}))$$
$$J_{10} \in 2^{-6}a^2b^2c^2(1+\mathfrak{m}),$$
$$I_{12} \in 2^{-4}(a^2b^2(1+\mathfrak{m}) + a^2c^2(1+\mathfrak{m}) + b^2c^2(1+\mathfrak{m}))\,.$$

On en déduit donc facilement le résultat.

Examinons maintenant le cas où $\mathrm{car}(k) = 2$, et $\mathscr{C}_s$ est réunion d'une courbe elliptique d'invariant nul et d'une courbe rationnelle. On peut montrer que, après une extension de K et un changement de variables éventuels, C est définie à partir d'une équation:

$$y^2 - x(1 + acx + a^3x^2)y = x^3 + bx, \quad a, b, c, \in \mathfrak{m}\,.$$

On calcule les invariants:

$$J_8 \in 1 + \mathfrak{m}, \quad J_{10} \in b^2a^{12}(1+\mathfrak{m}), \quad I_{12} \in a^{12}(1+\mathfrak{m})\,.$$

Il est aisé de voir que l'épaisseur e_0' du point d'intersection de $\mathscr{Z}_s$ est $e_0' = \nu(a^2)$, donc $e_0 = \nu(a)$. Calculons maintenant e_1. Soit $q \in \mathscr{C}_s$ la spécialisation du point $(x=0, y=0) \in C$, alors $A := \widehat{\mathcal{O}}_{\mathscr{C},q} = \widehat{R}[[x,y]]$. Soit $z = x(1 + acx + a^3x^2)$, alors $A = \widehat{R}[y,z]]$ avec $y^2 - yz = bz + z^2u$, où u est un élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ de A. Il existe $w \in \mathfrak{m}_A$ tel que $w^2 + w = u$. On obtient la relation suivante:

$$((1 + 3w + 2w^2)z - (1+2w)y + b)((w + 2w^2)z + (1+2w)y + b) = b^2\,.$$

Ce qui implique que $e_1 = e(q) = \nu(b^2)$. La proposition se vérifie alors immédiatement.

Il reste le cas où $\mathrm{car}(k) = 2$ et $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux courbes elliptiques sur k d'invariant modulaire nul. Soit $x_0 \in H_2$ un point correspondant à une telle courbe. Soit t une équation minimale de S^* en x_0. Soit $h = J_{10}^4 J_8^{-5} \in \mathscr{K}(\overline{\mathfrak{M}}_2 \times R) \subset \mathscr{K}(H_2)$ considéré comme une fonction rationnelle sur H_2. En procédent comme ci-dessus, on voit que pour tout $x \in S^*$ correspondant à la réunion de deux courbes elliptiques dont l'une au moins est d'invariant modulaire non nul, on a $t^{-48}h \in \mathcal{O}_{H_2,x}^*$ (les éléments inversibles de $\mathcal{O}_{H_2,x}$). Cela est donc vrai aussi pour x_0. On peut alors conclure avec le lemme ci-dessus.

6 Extension minimale réalisant la réduction stable

Notons R^{sh} l'hensélisé strict de R, $K^{\mathrm{sh}} = \mathrm{Fr}(R^{\mathrm{sh}})$, $\widehat{R}$ le complété de R et $\widehat{K} = \mathrm{Fr}\,\widehat{R}$. Soient $R' = \widehat{R}$ ou $R^{\mathrm{sh}}, K' = \mathrm{Fr}\,R'$, soient C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur K de genre $g(C) \geqq 1$, $\mathscr{X}$ le modèle minimal de C sur R. Alors $\mathscr{X} \times_R R'$ est le modèle minimal de $C \times_K K'$ sur R'. Soient $J(C)$ la Jacobienne de C, $\mathscr{N}$ le modèle de Néron de $J(C)$ sur R. On sait que $\mathscr{N} \times_R R'$ est le modèle de Néron de $J(C \times_K K')$ sur R' (voir [B-L-R, par. 7.2, theorem 1]).

Dans les deux propositions suivantes, nous rassemblons quelques résultats généraux sur la réduction stable, certains d'entre eux sont bien connus.

Proposition 3. *Avec les notations ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(a) *C admet un modèle stable sur R;*
(b) *C admet un modèle stable sur R^{sh};*
(c) *C admet un modèle stable sur $\widehat{R}$;*
(d) *$\mathscr{X}'_{\bar{s}}$ est réduite et n'a que des points doubles ordinaires comme singularités;*
(e) *la fibre spéciale $\mathscr{N}'^{\circ}_{s}$ de la composante neutre de $\mathscr{N}'$ est une variété semi-abélienne (i.e. extension d'une variété abélienne par un tore).*

Preuve. (b) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e): on peut supposer $R = R^{\mathrm{sh}}$, voir alors [D-M, proposition 2.3 et theorem 2.4].

(a) $\Leftrightarrow$ (b): il suffit de montrer que (b) implique (a). Soit $\mathscr{C}$ le modèle stable de C sur R^{sh}, alors $G := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sh}}/K)$ agit sur $\mathscr{C}$ de façon compatible avec son action sur $\mathrm{Spec}(R^{\mathrm{sh}})$. Le quotient $\mathscr{C}/G$ est un R-schéma normal, donc $(\mathscr{C}/G) \times_R R^{\mathrm{sh}}$ est normal (puisque étable sur $\mathscr{C}/G$). Comme on a un morphisme fini birationnel $\mathscr{C} \to (\mathscr{C}/G) \times_R R^{\mathrm{sh}}$, c'est un isomoprhisme, donc $\mathscr{C}/G$ est un modèle stable de C sur R.

Enfin, en appliquant l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (d) à $\widehat{R}$, on a (c) $\Rightarrow$ (d).

Proposition 4. *Supposons R strictement hensélien. Soit C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur K, de genre $g(C) \geqq 1$. Alors on a les propriétés suivantes:*

(α) Il existe une extension galoisienne L de K telle que pour toute extension finie F de K, C a réduction stable sur F (voir définition 1) si et seulement si $F \supset L$;

(β) Soit $\mathscr{C}$ le modèle stable de C sur R_L (la clôture intégrale de R dans L), il existe un homomorphisme canonique injectif Gal(L/K) $\to$ $\mathrm{Aut}_{k^{\mathrm{alg}}}(\mathscr{C}_{\bar{s}})$;

(γ) En particulier si d est le plus grand facteur premier à car(k) *de $[L : K]$, alors d est l'ordre d'un élément de* $\mathrm{Aut}_{k^{\mathrm{alg}}}(\mathscr{C}_{\bar{s}})$;

(δ) Inversement, supposons R complet et k algébriquement clos. Alors pour toute courbe stable D sur k telle que $\mathrm{Aut}_k(D)$ *ait un élément d'ordre n premier à* car(k), *il existe une courbe projective lisse E sur K avec $\mathscr{E}_{\bar{s}} \simeq D$, et qui n'a réduction stable qu'après extension de K de degré n.*

Preuve. (α) Voir l'exposé de [D, théorème 5.15].

(β) Soit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, il agit sur le R-schéma $\mathscr{C}$, d'où une application $\lambda : G \to \mathrm{Aut}_R(\mathscr{C})$. En considérant l'action de G sur $\mathscr{C} \times_{R_L} L \simeq C \times_K L$, on voit que λ est un homomorphisme de groupes. Soit l le corps résiduel de L, alors λ induit un homomorphisme de groupes $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(\mathscr{C} \times_{R_L} l) = \mathrm{Aut}_l(\mathscr{C} \times_{R_L} l)$. Posons $L_0 = L^{\ker \varrho}$, alors d'après [D, lemme 5.16], $J(C)$ a réduction semi-abélienne sur L_0, donc C a réduction stable sur L_0, d'où $L_0 = L$ et $\mathrm{Ker}\, \varrho = \{1\}$. On obtient un homomorphisme injectif $G \to \mathrm{Aut}_{k^{\mathrm{alg}}}(\mathscr{C}_{\bar{s}})$ en composant ϱ avec $\mathrm{Aut}_l(\mathscr{C} \times_{R_L} l) \simeq \mathrm{Aut}_{k^{\mathrm{alg}}}(\mathscr{C}_{\bar{s}})$ ([D-M, theorem 1.11]).

(γ) Comme k est séparablement clos, d divise l'indice de ramification de L/K. Donc G a un groupe quotient cyclique d'ordre d. Il suit que G a un élément d'ordre d.

(δ) C'est une conséquence immédiate de [V]. En effet, soient $\tau \in \mathrm{Aut}_k(D)$ d'ordre n premier à car(k), $x_1 \ldots, x_r$ les points doubles de D. En utilisant [V, Satz 4.4, Lemma 3.8 et Bemerkung 4.6(iv)], on voit qu'il suffit de montrer qu'il existe des entiers naturels $n_1, \ldots, n_r$ qui satisfont les conditions de [V, Definition 4.1(i)].

Prenons les notations de [V, 3.11]. Soient x_i un point double de D, m un générateur du groupe $\{l \in \mathbb{Z} \mid \tau^l(x_i) = x_i\}$. Montrons que m divise $\mu := \mu(e_n, \tau^m, x_i)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on prendra alors $n_i \equiv \mu/m \bmod[n]$). Soient $q = \mathrm{pgcd}(m, n), a, b, c, d$ les éléments de k associés à l'automorphisme de $\hat{\mathscr{O}}_{D,x_i}$ induit par τ^m. Comme $(\tau^m)^{n/q} = 1$, on a $(ab + cd)^{n/q} = 1$, donc q divise μ, donc m divise μ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque 6. Supposons R strictement hensélien. On sait que si $\mathrm{car}(k) = 0$ ou si $\mathrm{car}(k) > 2g(C) + 1$, alors L est une extension modérément ramifiée, donc cyclique, de K ([V, Satz 2.2], voir aussi [S-T, par. 2]). On peut aussi déduire ce résultat de la proposition 4. En effet, soit $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ la fibre spéciale géométrique de $\mathscr{C}$ sur R_L, on voit sans trop de difficultés que les diviseurs premiers de $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}_{k^{\mathrm{alg}}}(\mathscr{C}_{\bar{s}}))$ sont $\leqq 2g(C)+1$ (voir [Ho] pour le cas $\mathscr{C}$ lisse; le cas non lisse résulte du cas lisse et d'un raisonnement combinatoire sur le graphe de $\mathscr{C}_{\bar{s}}$), il suit que l'hypothèse $\mathrm{car}(k) = 0$ ou $\mathrm{car}(k) > 2g(C) + 1$ implique que $[L : K]$ est premier à $\mathrm{car}(k)$.

Dans la suite du paragraphe, on gardera les notations de la proposition 4 (lorsque R est strictement hensélien).

Corollaire 4.1. *Supposons R strictement hensélien,* $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$. *Soit C une courbe projective lisse géométriquement connexe de genre 2 sur K. Dans les situations suivantes, L est une extension modérément ramifiée (donc cyclique) de K:*

(1) $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ *est lisse et* $\not\simeq C_0, C_1$ *(voir 4.1), cela implique que* $[L : K]$ *divise 4 ou 6;*
(2) $\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_1$ *et* $\mathrm{car}(k) \neq 5$, *on a alors* $[L : K]$ *divisant 6 ou 8;*
(3) $\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_0$ *et* $\mathrm{car}(k) \neq 5$, *on a* $[L : K]$ *divise 10;*
(4) $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ *est singulière, alors* $[L : K]$ *divise 8 ou 12.*

Remarque 7. On sait que $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est déterminée par les invariants J_{2i} associés à une équation de C (théorème 1). En particulier:

$$\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_0 \Leftrightarrow J_{2i}^5 J_{10}^{-1} \in \mathfrak{m} \quad \text{pour tout} \quad i < 5;$$

si $\mathrm{car}(k) \neq 5$, alors $\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_1$ équivaut à $J_2 \neq 0$ et

$$J_4 J_2^{-2} - 2^{-3} \cdot 5^{-1} \cdot 3 \in \mathfrak{m}, \quad J_6 J_2^{-3} + 2^{-4} \cdot 5^{-2} \in \mathfrak{m}, \quad J_{10} J_2^{-5} - 2^{-4} \cdot 5^{-5} \in \mathfrak{m}.$$

Remarque 8. Dans l'hypothèse où $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est lisse, $g(C) \geqq 1$ et L/K modérée, Lorenzini donne une majoration $[L : K] \leqq 2(2u + 1)$ en termes du rang unipotent u du modèle de Néron de $J(C)$, ainsi que des renseignements précis sur les diviseurs premiers de $[L : K]$ [Lo-1, proposition 2.7]. À noter que si k est algébriquement clos, et $g(C) = 2$, alors C est automatiquement une S-courbe dans la terminologie de [Lo-1] (cf. [R, proposition 9.5.1]). D'autres majorations de $[L : K]$ sont données par Xiao [Xi, theorem 2].

Définition 3. Soit C une courbe projective lisse sur K. On dit que C a *bonne réduction* sur K si elle est la fibre générique d'une courbe stable lisse sur R. On dit que C a *potentiellement bonne réduction* si $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ (définition 1, par. 1) est lisse. Cela veut dire qu'il existe une extension valuée finie F de K telle que $C \times_K F$ ait bonne réduction sur F.

Lemme. *Supposons R strictement hensélien, car$(k) \neq 2$. Soit C une courbe projective lisse sur K définie par une équation $y^2 = P(x) \in K[x]$. Si C a bonne réduction sur K, alors les racines de $P(x)$ sont dans K. Inversement, si $P(x)$ a au moins deux racines dans K et si C a potentiellement bonne réduction, alors C a bonne réduction sur une extension quadratique de K.*

Preuve. Elémentaire.

Proposition 5. *Supposons* car$(k) \neq 2$ *et notons ν la valuation normalisée de K. Soit C une courbe projective lisse de genre 2 sur K, définie par une équation*

$$y^2 = a_1x^5 + a_2x^4 + \cdots + a_6 \in K[x],$$

ayant potentiellement bonne réduction. Supposons que $\mathscr{C}_{\bar{s}} \not\simeq C_0$ si car$(k) = 5$ *(voir par. 4.1). Alors C a bonne réduction sur K si et seulement si $40 \mid \nu(a_1^{30}J_{10}^{-1})$. Cette condition est encore nécessaire si car$(k) = 5$ et $\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_0$.*

Preuve. On vérifie que la propriété $40 \mid \nu(a_1^{30}J_{10}^{-1})$ ne dépend pas du choix de l'équation $y^2 = a_1x^5 + a_2x^4 + \cdots + a_6$. Si C a bonne réduction, alors on aura une équation de C avec $a_1, J_{10} \in R^*$, d'où $40 \mid \nu(a_1^{30}J_{10}^{-1})$.

Inversement, supposons $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ lisse et $40 \mid \nu(a_1^{30}J_{10}^{-1})$. Soit $\nu(a_1^{30}J_{10}^{-1}) = 40r$, posons $a = a_1t^{-2r}$, $b = a_1^3t^{-5r}$, où t est une uniformisante de R. Alors par le changement de variables $x = av - (5a_1)^{-1}a_2$, $y = bw$, on se ramène à une équation

$$w^2 = v^5 + b_3v^3 + b_4v^2 + b_5v + b_6 \in K[v]$$

de C avec $J_{10} \in R^*$. Si car$(k) \neq 5$, cela implique que $b_i \in R$, donc C a bonne réduction. Si car$(k) = 5$ et $\mathscr{C}_{\bar{s}} \not\simeq C_0$, on se ramène d'abord à R strictement hensélien. On sait alors que $[L : K]$ divise 4 ou 6, et le lemme ci-dessus permet de conclure.

Remarque 9. La courbe $y^2 = x^5 + x + 1/5$ sur $\mathbb{Q}_5$ a potentiellement bonne réduction et vérifie $J_{10} \in R^*$, mais elle n'a pas bonne réduction. D'autre part, si R est strictement hensélien avec car$(k) = 5$, et si $\mathscr{C}_{\bar{s}} \simeq C_0$, le lemme précédent montre que $[L : K]$ divise 40. La courbe $y^2 = x^5 + 5x^4 + 25$ sur $\mathbb{Q}_5^{\mathrm{sh}}$ vérifie $\nu(J_{10}) = 11$, donc la borne 40 est atteinte.

Proposition 6. *Supposons* car$(k) \neq 2, 3, 5$. *Soit C une courbe projective lisse sur K définie par une équation $y^2 = a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_6 \in K[x]$, avec $a_0 \neq 0$, ayant potentiellement bonne réduction. Posons $A_2 = 12a_0a_2 - 5a_1^2$, $h = A_2^{15}a_0^{-20}J_{10}^{-1}$. Alors C a bonne réduction sur K si et seulement si: ou bien*

$$\nu(h) \geqq 0, \quad \text{et} \quad 2 \mid \nu(a_0), \quad 30 \mid \nu(a_0^{10}J_{10}^{-1})$$

(par convention $\nu(0) = +\infty$), ou bien

$$\nu(h) < 0, \quad \text{et} \quad 2 \mid \nu(A_2), \quad 40 \mid \nu(A_2^{15}J_{10}^{-1}).$$

Preuve. On peut supposer R strictement hensélien en vertu de la proposition 3. On vérifie que h est invariant par les transformations $x \mapsto ax + b$, où $a \in K^*$, $b \in K$. De même, les propriétés de divisibilités ci-dessus restent inchangées par ces transformations. Soient $\mathscr{C}$ le modèle stable de C sur L, σ son involution hyperelliptique. On peut considérer le morphisme fini canonique $f : \mathscr{C} \to \mathscr{Z} := \mathscr{C}/\langle\sigma\rangle$. Si $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est lisse, alors $\mathscr{Z}_{\bar{s}} \simeq \mathbb{P}^1_{k^{\mathrm{alg}}}$. Notons ω le point de $\mathscr{Z}_\eta$ correspondant à $x = \infty$, et $\bar{\omega}$ sa spécialisation dans $\mathscr{Z}_s$.

(A) *Supposons que C a bonne réduction.* Si f est non-ramifié au dessus de $\bar{\omega}$, on peut se ramener à $a_i \in R$ et $a_0, J_{10} \in R^*$. Il suit que

$$\nu(h) \geqq 0, \quad \text{et} \quad 2 \mid \nu(a_0), \quad 30 \mid \nu(a_0^{10} J_{10}^{-1}).$$

Si f est ramifié au dessus de $\bar{\omega}$, on peut se ramener à $a_i \in R$, $a_0 \in \mathfrak{m}$ et $a_1, J_{10} \in R^*$. On a alors $A_2 \in R^*$, $\nu(h) = -20\nu(a_0) < 0$ et $40 \mid \nu(A_2^{15} J_{10}^{-1})$.

(B) *Démontrons la réciproque.* Supposons d'abord que l'on est dans le cas $\nu(h) \geqq 0$. Soient $\nu(a_0) = 2q$, $\nu(a_0^{10} J_{10}^{-1}) = 30r$, avec $q, r \in \mathbb{Z}$. Posons $a = t^{-r}$, $b = t^{-3r+q}$, où t est une uniformisante de R. Alors, après le changement de variables $x = av - (6a_0)^{-1} a_1$, $y = bw$, on est ramené à une équation

$$w^2 = b_0 v^6 + b_2 v^4 + b_3 v^3 + \cdots + b_6 =: Q(v) \in K[v]$$

de C avec $b_0, J_{10} \in R^*$ et $b_2 \in R$. D'après (A), f est non-ramifié au dessus de $\bar{\omega}$. Donc il existe $\alpha \in L$ tel que $Q(v + \alpha) \in R_L[v]$, où R_L est la clôture intégrale de R dans L. Il suit que $\alpha \in R_L$ et donc $Q(v) \in R[v]$. Par conséquent, C a bonne réduction.

Plaçons-nous maintenant dans le cas $\nu(h) < 0$. Posons $\nu(A_2) = 2s$, $\nu(A_2^{15} J_{10}^{-1}) = 40r$. Par le changement de variables $x = t^{s-2r} u - a_1(6a_0)^{-1}$, $y = t^{3s-5r} w$, on se ramène à une équation de C:

$$w^2 = b_0 u^6 + b_2 u^4 + b_3 u^3 + \cdots + b_6 = Q(u) \in K[u]$$

avec $J_{10}, b_0 b_2 \in R^*$ et $b_0 \in \mathfrak{m}$. Comme $\mathscr{C}_{\bar{s}}$ est lisse, il existe $\alpha \in L$ tel que $Q(u + \alpha) \in R_L[u]$, et $\beta := 6b_0\alpha \in R_L^*$. Par suite $15 b_0 \alpha^2 + b_2 \in R_L$, donc $5\beta^2 + 12 b_0 b_2 \in b_0 R_L$. Soit $c \in R^*$ tel que $5c^2 + 12 b_0 b_2 = 0$, alors $\beta^2 - c^2 \in R_L$. On a donc par exemple $\beta \in c + b_0 R_L$, cela implique que $\alpha \in (6b_0)^{-1} c + R_L$. On en conclut que $Q(u + (6b_0)^{-1} c) = b_0 u^6 + c u^5 + \cdots \in R[u]$. Donc C a bonne réduction sur K.

Remerciements. Je remercie J. Fresnel et M. Matignon pour les nombreuses conversations que nous avons eues.

Références bibliographiques

[B-L-R] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: Néron models. Berlin Heidelberg New York: Springer 1990.

[Bo] Bosch, S.: Formelle standardmodelle hyperelliptischer Kurven. Math. Ann. **251**, 19–42, (1980)

[B-M-MB] Bost, J.-B., Mestre, J.-F., Moret-Bailly, L.: Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2. In: Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques. (Astérique, vol. **183**, pp. 69–105) Paris: Soc. Math. Fr. 1990

[C] Coleman, R.: Computing stable reductions. In: Goldstein, C. (ed.) Séminaire de théorie des nombres de Paris 1985–1986. (Prog. Math., vol. **71**, pp. 1–18) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1987

[D] Deschamps, M.: Réduction semi-stable. In: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. (Astérisque, vol. **86**, 1–34) Paris: Soc. Math. Fr. 1981
[D-M] Deligne, P., Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **36**, 75–110 (1969)
[F-vdP] Fresnel, J., van der Put, M.: Géométrie analytique rigide et applications. (Prog.Math., vol. **18**), Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1981
[He] Herrlich, F.: Modultheorie hyperelliptischer Mumfordkurven. Math. Ann. **274**, 283–299, (1986)
[Ho] Homma, M.: Automorphisms of prime order of curves. Manuscr. Math. **33**, 99–109 (1980)
[Ig] Igusa, J.I.: Arithmetic variety of moduli for genus two. Ann. Math. **72**, 612–649 (1960)
[Li-1] Liu, Q.: Réduction stable des courbes de genre 2 et le schéma de modules $\overline{\mathfrak{M}}_2$, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I **313**, 95–98 (1991)
[Li-2] Liu, Q.: Modèles minimaux des courbes de genre 2. (preprint 1992)
[Lo-1] Lorenzini, D.: Dual graphs of degenerating curves. Math. Ann. **287**, 135–150 (1990)
[Lo-2] Lorenzini, D.: On the group of components of a Néron model. (preprint 1992)
[Lø] Lønsted, K.: The singular points of the moduli spaces for smooth curves. Math. Ann. **266**, 397–402 (1984)
[Me] Mestre, J.-F.: Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules. In: Mora, T., Traverso, C. (eds.) Effective methods in algebraic geometry. (Prog. Math., vol. **94**) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1990
[Mo] Mostafa, S.: Die Singularitäten der Modulmannigfaligkeit $\overline{M}_g(n)$ der stabilen Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$ mit n-Teilungspunktstruktur. J. Reine Angew. Math. **343**, 81–98 (1983)
[Mu] Mumford, D.: An enumerative geometry of the moduli space. In: Artin, M., Tate, J. (eds.) Arithmetic and geometry. (Prog. Math., vol. **36**, 271–328) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1983
[N] Namikawa, Y.: On the canonical holomorphic map from the moduli space of stabele curves to the Igusa monoidal transform. Nagoya Math. J. **52**, 197–259 (1973)
[N-U] Namikawa, Y., Ueno, K.: The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two. Manuscr. Math. **9**, 143–186 (1973)
[Og] Ogg, A.P.: On pencils of curves of genus two. Topology **5**, 355–362 (1966)
[R] Raynaud, M.: Spécialisation du foncteur de Picard. Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **38**, 27–76 (1970)
[S] Serre, J.-P.: Corps locaux, 2ème éd. Paris: Hermann 1968
[S-T] Serre, J.-P., Tate, J.: Good reduction of abelian varieties. Ann. Math. **88**, 492–516 (1968)
[T] Tate, J.: Rigid analytic spaces. Invent. Math. **12**, 257–289 (1971)
[V] Viehweg, E.: Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven. J. Reine Angew. Math. **293**, 284–308 (1977)
[Xi] Xiao, G.: On the stable reduciton of pencils of curves. Math. Z. **203**, 379–389 (1990)