Calcul de solutions exactes d'EDP

Problème hyperbolique 1
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\delta_t u + c\,\delta_x u = 0$$

avec $t > 0$ et $x \in]0, 1[$.

a) Sur quels segments de droite du plan (x,t) la solution de cette équation est-elle constante ? On appelle les droites correspondantes les caractéristiques de la solution.
b) Représentez graphiquement, dans le plan (x,t), certaines de ces droites.
c) De quelles informations supplémentaires a-t-on besoin pour déterminer entièrement la solution pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $t > 0$?
d) Donner une expression de la solution de ce problème.

Problème hyperbolique 2
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\delta_t u + c\,\delta_x u = u$$

avec la donnée initiale $u(0, x) = u_0(x) \in C^1(\mathbb{R})$ avec c une constante réelle.
a)On commence par considérer l'équation sans second membre. Quelles sont les caractéristiques de cette équation ?
b) On revient à l'équation avec second membre. Montrer que la solution, si elle existe, vérifie sur chaque caractéristique une équation différentielle ordinaire.
c) Intégrer cette équation et en déduire l'expression de la solution si elle existe. Vérifier que cette expression est bien solution du problème.

Problème elliptique
Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = 0, & \\ u(1) = 0, & \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.
Vérifier que ce problème admet une unique solution que l'on peut exprimer sous la forme

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

où G est la *fonction de Green* :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) \text{ si } 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ \xi(1-x) \text{ si } 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Problème parabolique : équation de la chaleur 1D sur un domaine borné
Le champ de température d'une barre conductrice de chaleur de longueur L, fixée, isolée latéralement, est décrit par l'équation de la chaleur (ou équation de Fourier) :

$$\delta_t u(x,t) = \alpha^2 \delta^2_{xx} u(x,t),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

à laquelle on ajoute une condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x)$$

et des conditions au bord qu'on précisera par la suite.

On recherche des solutions par la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire sous la forme :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

a) Montrer que X et T vérifient des équations différentielles ordinaires qui font intervenir une constante qu'on note λ. (On pose $\dfrac{X''}{X} = \lambda$).
b) Résoudre ces équations (on souhaite des solutions bornées).
c) On suppose que les conditions au bord suivantes sont vérifiées :

$$X(0) = X(L) = 0$$

(Cela correspond à des extrémités de la barre de température nulle). Montrer que les seules solutions pour λ sont de la forme :

$$\lambda = \lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

d) La solution générale est donc de la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n exp(-(\frac{n\pi\alpha}{L})^2 t) sin(\frac{n\pi x}{L})$$

On cherche maintenant à déterminer les coefficients A_n.

Montrer que

$$\int_0^L u_0(x) sin(\frac{m\pi x}{L}) dx = \frac{L}{2} A_m$$