Propriétés de la discrétisation par différences finies d'un problème elliptique

Dans toute la suite, on considère l'équation aux dérivées partielles

$$-u_{xx} = f$$

définie sur l'intervalle $]0,1[$ avec f continue.

a) De quelles informations supplémentaires a-t-on besoin pour que le problème soit bien défini ?

On considère une discrétisation de ce problème avec des différences finies :

$$(P) = \begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{dx^2} & = f_i \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ u_0 & = 0 \\ u_n & = 0 \end{cases}$$

avec $dx = 1/n$ et $f_i = f(x_i) = f(i\,dx)$.

b) On qualifie usuellement ce type de différences finies de "centrées d'ordre 2". Pourquoi ?

Inégalité de Poincaré
On admet le résultat suivant :
Pour toute fonction $v \in C^1[0,1]$ avec v(0) = 0, on a :

$$\int_0^1 v^2(x)dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 v'(x)^2 dx$$

On cherche à montrer l'équivalent discret de cette propriété.

On définit pour un vecteur de taille $n+1$:

$$|v|_{1,dx} = \Big(dx \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{v_{i+1}-v_i}{dx})^2 \Big)^{1/2}$$

et pour un vecteur de taille $n-1$:

$$||v||_{2,dx} = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} dx\, v_i^2 \Big)^{1/2}.$$

c) Laquelle est une semi-norme, laquelle est une norme ? Pourquoi un facteur dx apparait-il dans ces formules ?

On considère maintenant une suite de valeurs discrètes : v_i avec $0 \leq i \leq n$ telle que $v_0 = 0$.

d) Montrer que :

$$v_i^2 \leq \left[\sum_{j=0}^{i-1} 1\right] \left[\sum_{j=0}^{i-1} (v_{j+1} - v_j)^2\right]$$

e) En déduire que :

$$||v||_{2,dx} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2n}} |v|_{1,dx}.$$

Principe du maximum faible

f) On suppose que $f < 0$. Montrer qu'alors la solution u du système linéaire (P) ne peut atteindre son maximum qu'en $i = 0$ ou $i = n$.

On admet maintenant le résultat suivant :
On suppose que u est solution de $u_{xx} = 0$. Si $u(0) \leq M$ et $u(1) \leq M$ alors $u(x) \leq M \ \forall x \in]0, 1[$.

g) Quelle serait la formulation du résultat équivalent pour la version discrète ?

h) En utilisant la suite discrète $v_i = u_i + \epsilon\, x_i^2$, avec $\epsilon > 0$, montrer ce résultat.

Valeurs propres
On s'intéresse ici aux valeurs propres et solutions propres de l'opérateur $-u_{xx}$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène, et de sa version discrète (P), c'est-à-dire aux couples (λ, u) tels que $-u_{xx} = \lambda u$ avec $u(0) = u(1) = 0$ pour la version continue, ou tels que $-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{dx^2} = \lambda u_i \ \ 1 \leq i \leq n - 1$, avec $u_0 = u_n = 0$ pour la version discrète.

i) Montrer que les valeurs propres de ces opérateurs sont positives, pour la version discrète et la version continue.

j) Donner la forme des fonctions propres et valeurs propres, dans le cas discret et continu.

k) Etudier la convergence des valeurs discrètes vers les valeurs continues, quand $dx \to 0$.