Convergence : différences finies et volumes finis

Dans la suite, on considère l'équation aux dérivées partielles

$$-u''(x) = f(x)$$

définie sur l'intervalle $]0,1[$ avec f continue. Les conditions aux limites sont : $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

On considère une discrétisation de ce problème avec des différences finies :

$$(P) = \begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} & = f_i \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ u_0 & = 0, \\ u_n & = 0. \end{cases}$$

avec $h = 1/n$, $f_i = f(x_i)$ et $x_i = i\,h$. On note A^h_{DF} la matrice de discrétisation du système linéaire ainsi défini.

a) *Montrer que la matrice A^h_{DF} est monotone, c-a-d : $A^h_{DF} y \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$.*

b) *Trouver un vecteur v tel que $(A^h_{DF} v)_i = 1$ pour tout i.*

c) *En déduire une majoration de $||(A^h_{DF})^{-1}||_\infty$.*

d) *En déduire la convergence à l'ordre 2 en norme max de la solution numérique vers la solution du problème.*

On considère maintenant une discrétisation par volume finis du même problème.

On appelle maillage volumes finis sur l'intervalle $[0,1]$ un ensemble de N mailles $(K_i)_{i=1,\ldots,N}$, telles que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, avec $x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N+1/2} = 1$. On note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

On se donne aussi N points $(x_i)_{i=1,\ldots,N}$ situés dans les mailles K_i. On a donc :

$$0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N+1/2} = 1$$

On note $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, et $h = \max_{i=1,\ldots,N} h_i$. Pour des raisons de notation on définit aussi $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$.

Pour obtenir un schéma volumes finis on part de la forme intégrale de l'équation elliptique, obtenue en l'intégrant sur l'intervalle K_i :

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{K_i} f(x)\,dx$$

On introduit les inconnues u_i (une par maille, située au point x_i) et les flux numériques $F_{i+1/2} = -\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$, $i = 0, \ldots, N$. Les équations discrètes sont donc :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i$$

avec $f_i = \dfrac{1}{h_i} \displaystyle\int_{K_i} f(x)dx$. On peut écrire le système linéaire obtenu sur la forme :

$$A_{VF}^h U_h = b_h$$

e) *Montrer que ce système linéaire admet une unique solution.*

Soit u la solution exacte du problème (P). On appelle $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ le flux exact en $x_{i+1/2}$, et $\tilde{F}_{i+1/2} = -\dfrac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$ l'approximation obtenue en utilisant la formule du flux numérique avec les valeurs de la solution exacte. On dit que le flux numérique est d'ordre p s'il existe C un réel positif, ne dépendant que de u, tel que l'erreur de consistance sur le flux, définie par

$$\tau_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i+1/2}$$

vérifie

$$|\tau_{i+1/2}| \leq C\, h^p.$$

f) *Montrer que le flux numérique* $F_{i+1/2} = -\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$ *est consistant d'ordre 1.*

On note maintenant $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $i = 1, \ldots, N$.

g) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch^2$ *et en déduire* $\max_{i=1,\ldots,N} |e_i| \leq Ch$.