Problèmes paraboliques, approximation par différences finies

Dans la suite, on considère

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

et l'équation de Schrodinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

définies sur l'intervalle $]0, 1[$, avec des conditions aux limites de Dirichlet, et la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

a) *Etudier la stabilité, et le cas échéant l'ordre de convergence de la méthode d'Euler explicite (couplée à une discrétisation centrée d'ordre deux classique pour la dérivée spatiale) pour l'équation de la chaleur et l'équation de Schrodinger.*

***b**) Idem pour la méthode d'Euler implicite.*

***c**) On considère maintenant le schéma de Richardson pour l'équation de la chaleur :*

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2dt} - \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{dx^2} = 0$$

Etudier la stabilité, et le cas échéant l'ordre de convergence de cette méthode.

***d**) Etudier la stabilité de la variante où les termes spatiaux sont implicités :*

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2dt} - \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{dx^2} = 0$$

***e**) On considère maintenant le schéma de Crank-Nicholson pour l'équation de la chaleur :*

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{dt} - \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{dx^2} = 0$$

Etudier la stabilité, et le cas échéant l'ordre de convergence de cette méthode.