Etude de stabilité : Schémas pour l'équation de transport

On considère l'EDP suivante :

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0, \forall t > 0, \forall x \in]0,1[$$

avec $u(0,x) = u_0(x)$, c un réel positif, et des conditions aux limites appropriées. On note u_j^n une approximation numérique de u au temps $t^n = n\,dt$ et au le point $x_j = j\,dx$, avec $dx = 1/N$. Pour résoudre numériquement ce problème on considère les méthodes suivantes :

— saute-mouton :

$$\partial_t u(t^n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\,dt}$$

associée aux discrétisations spatiales suivantes :

— centrée d'ordre 2 :

$$\partial_x u(t^n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,dx}$$

— décentré amont :

$$\partial_x u(t^n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{dx}$$

— décentré aval :

$$\partial_x u(t^n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{dx}$$

— Lax-Wendroff :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\,dt}{2\,dx}\Big(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\Big) + \frac{c^2\,dt^2}{2\,dx^2}\Big(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\Big).$$

a) Quelles conditions aux limites faut-il imposer pour que le problème soit bien défini ?

b) Calculer l'ordre de l'erreur de troncature, évaluer la stabilité et si nécessaire l'ordre de convergence pour le schéma saut-mouton associé aux trois discrétisations spatiales proposées.

c) Idem pour le schéma de Lax-Wendroff.

d) Idem pour le schéma de Crank-Nicholson.

e) **Phénomène de Gibbs** :
Le schéma de Lax-Wendroff, bien que stable en norme L^2, peut créer des oscillations parasites si la solution discrète a de forts gradients. Pour le constater, calculer la première itération de ce schéma pour une condition initiale constante par morceaux, et interpréter le résultat.