Volumes finis

On considère l'EDP suivante :

$$u_t + f(u)_x = 0$$

avec f une fonction continument dérivable.

On note u_j^n l'approximation numérique de la solution au point $x_j = j\,dx$ et à l'instant $t^n = n\,dt$. On s'intéresse à la discrétisation de l'EDP par les méthodes numériques suivantes :

– Lax-Friedrichs :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{dt}{2\ dx}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))$$

– Engquist-Osher :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{dt}{2\,dx}\Big(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) + \int_{u_{j-1}^n}^{u_j^n} |a(u)|du - \int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |a(u)|du\Big)$$

– Lax-Wendroff :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{dt}{2\,dx}\Big(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\Big) + \frac{dt^2}{2\,dx^2}\Big(a_{j+1/2}^n(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) - a_{j-1/2}^n(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))\Big)$$

avec $a_{j+1/2}^n = \frac{f'(u_{j+1}^n)+f'(u_j^n)}{2}$.

a) Quel est l'ordre de l' erreur de troncature (en temps et en espace) des schémas de Lax-Friedrichs et Lax-Wendroff ?

b) On dit qu'une méthode de volumes finis peut se mettre sous forme conservative s'il existe une fonction g telle que :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{dt}{dx}\Big(g(u_{j+1}^n, u_j^n) - g(u_j^n, u_{j-1}^n)\Big).$$

De plus, un schéma s'écrivant sous forme conservative est consistant au sens des volumes finis ssi :

$$g(u,u) = f(u) + cste\ \forall u \in \mathbb{R}$$

Montrer qu'un schéma consistant au sens des volumes finis est d'ordre 1 au moins si la fonction $g$est suffisamment régulière.

c) Les méthodes numériques présentées ci-dessus peuvent-elles se mettre sous forme conservative, sont-elles consistantes au sens des volumes finis ?

d) On s'intéresse maintenant au schéma de volumes finis de Steger-Warming, défini par :

$$g(u^n_{j+1}, u^n_j) = |f(u^n_{j+1})|^- + |f(u^n_j)|^+$$

avec $|x|^- = \frac{-|x|+x}{2}$ et $|x|^+ = \frac{|x|+x}{2}$.

Ce schéma est-il consistant aux sens des différences finies dans le cas $f(u) = au$ avec $a \geq 0$? Dans le cas général ?

e) On dit qu'un schéma est monotone ssi :

$$(u^n_j \geq v^n_j \ \forall j \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (u^{n+1}_j \geq v^{n+1}_j \ \forall j \in \mathbb{Z})$$

Soit un schéma de la forme :

$$u^{n+1}_j = H(u^n_{j+1}, u^n_j, u^n_{j-1})$$

Montrer que ce schéma est monotone ssi H est une fonction croissante de chacun de ses arguments.

e) Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs est monotone.