ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC ARNAUDON

# Semi-martingales dans les espaces homogènes

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 29, n° 2 (1993), p. 269-288

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_2_269_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 29, n° 2, 1993, p. 269-288. *Probabilités et Statistiques*

# Semi-martingales dans les espaces homogènes

par

**Marc ARNAUDON**

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

RÉSUMÉ. — Dans les groupes de Lie et certains espaces homogènes munis d'une connexion canonique, on considère les semi-martingales comme développées de semi-martingales de l'algèbre de Lie ou d'un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie, à l'aide de l'exponentielle stochastique de Hakim-Dowek et Lépingle. On caractérise de cette façon les martingales des espaces homogènes et les browniens des espaces symétriques de type non-compact, et on retrouve les décompositions d'Iwasawa et de Cartan du brownien obtenues par M. P. et P. Malliavin.

ABSTRACT. — Lie groups and homogeneous space-valued semi-martingales are considered as developments for some canonical connection, of semi-martingales with values in the Lie algebra or a subspace of the Lie algebra. Homogeneous space-valued martingales are characterized in that way, and the Iwasawa and Cartan decompositions of brownian motion obtained by M. P. and P. Malliavin are deduced.

## INTRODUCTION

La première partie concerne l'étude des semi-martingales dans les groupes de Lie à l'aide de l'exponentielle stochastique et à partir d'un article

*Classification A.M.S. :* 60 G XX, 53 C 30, 53 C 35, 53 C XX, 22 E XX.

de Hakim-Dowek et Lépingle [HD, L]. Si on munit le groupe de sa connexion invariante à gauche et sans courbure, l'exponentielle stochastique devient le développement des semi-martingales, et ce développement a même durée de vie que la semi-martingale de l'algèbre de Lie [HD, L].

Dans la deuxième partie, nous nous plaçons sur un groupe semi-simple et nous montrons que l'exponentielle stochastique d'un brownien de l'algèbre de Lie est un brownien du groupe en utilisant le calcul du générateur de l'exponentielle stochastique d'une diffusion effectué dans [HD, L].

La troisième partie est consacrée aux espaces homogènes réductifs, munis d'une connexion canonique définie par Nomizu [N]. L'espace tangent à l'origine de l'espace homogène est identifié à un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie du groupe, et l'exponentielle stochastique restreinte à ce sous-espace vectoriel et composée avec la projection canonique devient le développement des semi-martingales de l'espace homogène. Le principal ingrédient pour le montrer est la décomposition en produit de deux semi-martingales de l'exponentielle stochastique d'une somme de semi-martingales [HD, L]. Cela nous permet de caractériser les martingales. Dans les espaces symétriques de type non-compact, nous avons de plus une métrique canonique et nous caractérisons les mouvements browniens.

Enfin dans la quatrième partie, nous appliquons les résultats des parties précédentes pour retrouver les décompositions d'Iwasawa et de Cartan du brownien dans les espaces symétriques de type non-compact obtenues par M. P. et P. Malliavin [M, M] et étudiées par J. C. Taylor ([T1], [T2]), avec en corollaire l'écriture des laplaciens et des résultats de convergence des différentes composantes du brownien. La démarche de cette partie consiste à retrouver les résultats des articles de Taylor avec l'exponentielle stochastique, et à les reformuler en termes de martingales.

Je tiens à remercier J. C. Taylor pour avoir lu et commenté une première version de cet article.

## 1. EXPONENTIELLE STOCHASTIQUE ET CONNEXION GAUCHE

Après quelques rappels de géométrie, nous donnons la définition de l'exponentielle stochastique des groupes de Lie, nous énonçons les propriétés utiles dont quelques unes figurent dans [HD, L], puis nous introduisons la connexion gauche sur les groupes de Lie et nous regardons l'exponentielle stochastique comme le développement pour cette connexion.

Les semi-martingales à valeurs dans des variétés ou des espaces vectoriels seront toutes supposées continues.

Soient V et W deux variétés $C^\infty$ munies de connexions $\nabla^V$ et $\nabla^W$, soit $f \in C^\infty(V)$. On note $\mathrm{Hess}^V f = \nabla^V df$. L'application $\mathrm{Hess}^V f$ est symétrique quelle que soit $f$ si et seulement si $\nabla^V$ est sans torsion. Si $\varphi: V \to W$ est un morphisme de variétés, on dit que $\varphi$ est affine lorsque $\forall f \in C^\infty(W)$, $\mathrm{Hess}^V(f \circ \varphi) = \varphi^*(\mathrm{Hess}^W f)$.

Si $x$ est un point de V et X est un vecteur de $T_x V$, $\varphi_* X$ désigne le vecteur $T_x \varphi(X)$.

Soit X un champ de vecteurs sur V. Si $\varphi$ est un difféomorphisme, on note $\varphi_* X$ le champ de vecteurs sur W défini par $(\varphi_* X)_{\varphi(m)} = T_m \varphi X_m$. Alors $\varphi$ est affine si et seulement si quels que soient X, Y champs de vecteurs sur V, $\nabla^W_{\varphi_* X} \varphi_* Y = \varphi_*(\nabla^V_X Y)$; ([E], [H]).

Une semi-martingale S à valeurs dans V est une martingale si

$$\forall f \in C^\infty(V), \quad f(S) - f(S_0) - 1/2 \int_0 \mathrm{Hess}^V f(dS, dS)$$

est une martingale locale réelle [E].

### 1.1. Définition de l'exponentielle stochastique des groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, d'élément neutre $e$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sera identifiée à l'espace tangent $T_e G$. On notera, pour $g$ appartenant à G, $L_g$ (resp. $R_g$) l'application de G dans G qui à $g'$ associe $gg'$ (resp. $g'g$), $\mathrm{Int}(g) = L_g \circ R_{g^{-1}}$, $\mathrm{Ad}(g) = T_e \mathrm{Int}(g): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, et pour $X \in \mathfrak{g}$ $\mathrm{ad}(X) = (T_e \mathrm{Ad})(X)$.

Soit M une semi-martingale sur $\mathfrak{g}$ telle que $M_0 = 0$, $M = \sum_{i=1}^{n} M^i H_i$ avec $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de $\mathfrak{g}$.

L'exponentielle stochastique de M, notée $\varepsilon(M)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch

$$\delta X = (L_X)_* \delta M \qquad \text{avec} \quad X_0 = e$$

la première égalité étant équivalente à : quelle que soit $\theta$ forme différentielle sur G,

$$\int_0 \langle \theta, \delta X \rangle = \int_0 \langle (L_X)^* \theta, \delta M \rangle = \int_0 \langle \theta, H_i \rangle_X \delta M^i \quad \text{[HD, L]}$$

(la dernière expression est une intégrale de Stratonovitch).

### 1.2. Quelques propriétés de l'exponentielle stochastique

Soient M et N deux semi-martingales de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1. L'exponentielle stochastique $\varepsilon(M)$ est définie sur $[0, \infty[$.
2. Si le groupe G est abélien et si $M_0 = 0$, alors $\varepsilon(M) = \exp M$.

3. Nous avons l'égalité

$$\varepsilon(M+N)=\varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))\,\delta M\right)\varepsilon(N)$$

où $\mathrm{Ad}(\varepsilon(N))$ est une semi-martingale à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ et $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))\,\delta M$ est une intégrale de Stratonovitch.

4. Si T est un temps d'arrêt, $\varepsilon(M)=\varepsilon(M^T)\,\varepsilon(M-M^T)$.

5. Si $g\in G$, $\mathrm{Int}(g)(\varepsilon(M))=\varepsilon(\mathrm{Ad}(g)(M))$.

6. Si H est un élément de $\mathfrak{g}$, alors

$$\mathrm{Ad}(\varepsilon(M))(H)=H+\int_0 \mathrm{Ad}(\varepsilon(M))([H_i, H])\,\delta M^i.$$

7. Si X et Y sont des semi-martingales à valeurs dans G, alors

$$\int \mathrm{Ad}(X)\,\delta\left(\int_\cdot \mathrm{Ad}(Y)\,\delta M\right)=\int \mathrm{Ad}(XY)\,\delta M.$$

8. Revenons à la propriété (3), et écrivons $M=M_m+M_d$, $N=N_m+N_d$, avec $M_m$ et $N_m$ martingales locale et $M_d$, $N_d$ processus à variation finie. Écrivons $M=M^i H_i$, $N=N^i H_i$, $M^i=M^i_m+M^i_d$ et $N^i=N^i_m+N^i_d$. Alors la partie martingale de $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))\,\delta M$ est

$$\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))\,dM_m$$

et la partie à variation finie est

$$\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))\,dM_d+1/2\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(N))([H_i, H_j])\,d\langle N^i, M^j\rangle.$$

*Démonstration.* — 1. Ce résultat se trouve dans [HD, L], théorème 1.

2. Si on pose $X=\exp M$, on trouve $\delta X=T_M\exp(\delta M)$ et comme le groupe est abélien, on a $T_M\exp=T_e L_X$ si on identifie $\mathfrak{g}$ et $T_M\mathfrak{g}$. Donc $\exp M$ et $\varepsilon(M)$ vérifient la même équation différentielle stochastique et sont issues du même point, et par conséquent sont égales.

3. Ce résultat se trouve dans [HD, L] proposition 5.

4. Il suffit d'appliquer la propriété précédente à $M^T$ et $M-M^T$ en remarquant que $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M-M^T))\,\delta M^T=M^T$.

5. Soient $Y=\mathrm{Int}(g)\,(\varepsilon(M))$ et $X=\varepsilon(M)$. Alors $\delta Y=(\mathrm{Int}(g))_*(L_X)_*\,\delta M$. Or $\mathrm{Int}(g)\circ L_X=L_{\mathrm{Int}(g)(X)}\circ\mathrm{Int}(g)$, donc $\delta Y=(L_{\mathrm{Int}(g)(X)})_*\ \mathrm{Ad}(g)\,\delta M$ $=(L_Y)_*\ \mathrm{Ad}(g)\,\delta M$ ce qui prouve que $Y=\varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(g)\,\delta M\right)=\varepsilon(\mathrm{Ad}(g)(M))$.

6. Soit $h(g)=\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{H})$. Alors $\mathrm{T}_e(h\circ \mathrm{L}_g)(\mathrm{K})=\mathrm{Ad}(g)([\mathrm{K},\mathrm{H}])$. Donc

$$h(\varepsilon(\mathrm{M}))=\mathrm{H}+\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{M}))([\delta\mathrm{M},\mathrm{H}])=\mathrm{H}+\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{M}))([\mathrm{H}_i,\mathrm{H}])\,\delta\mathrm{M}^i.$$

7. Les intégrales de Stratonovitch à valeurs vectorielles se composent de la même façon que les intégrales classiques.

8. $$\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))\,\delta\mathrm{M}=\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))\,\mathrm{H}_i\,\delta\mathrm{M}^i$$
$$=\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))\,d\mathrm{M}+1/2\langle \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))(\mathrm{H}_i),\mathrm{M}^i\rangle$$

et

$$\delta\,\mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))(\mathrm{H}_i)=\mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))([\mathrm{H}_j,\mathrm{H}_i])\,\delta\mathrm{N}^j$$

d'après la propriété 6, donc

$$1/2\langle \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))(\mathrm{H}_i),\mathrm{M}^i\rangle=1/2\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))([\mathrm{H}_j,\mathrm{H}_i])\,d\langle \mathrm{N}^j,\mathrm{M}^i\rangle$$

et

$$\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))\,d\mathrm{M}=\underbrace{\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{N}))\,d\mathrm{M}_m}_{\text{mart loc.}}+\underbrace{\int (\mathrm{Ad}\,\varepsilon(\mathrm{N}))\,d\mathrm{M}_d}_{\text{var. finie}}$$

ce qui achève la démonstration.

### 1.3. La connexion gauche sur un groupe de Lie

La connexion gauche $\nabla^{\mathrm{L}}$ sur G est caractérisée par $\nabla^{\mathrm{L}}_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}\equiv 0$ si Y est invariant à gauche. Pour cette connexion, les sous-groupes à un paramètre sont des géodésiques, les applications $\mathrm{L}_g$, $\mathrm{R}_g$, $\mathrm{Int}(g)$ sont affines.

La proposition suivante établit un lien avec l'exponentielle stochastique.

PROPOSITION 1.1. — *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Soient* $\gamma:\mathbb{R}\to\mathrm{G}$ *un chemin de classe* $\mathrm{C}^\infty$ *tel que* $\gamma(0)=e$ *et* V *un élément de* $\mathfrak{g}$. *Alors* $\mathrm{U}(t)=\mathrm{V}_{\gamma(t)}$ *est le transport parallèle de* $\mathrm{V}_e$ *au-dessus de* $\gamma$ *pour la connexion* $\nabla^{\mathrm{L}}$.

2. *Soient* M *une semi-martingale à valeurs dans* $\mathfrak{g}$, $\mathrm{X}=\varepsilon(\mathrm{M})$ *l'exponentielle stochastique de* M, *et* V *un élément de* $\mathfrak{g}$. *Alors le processus* U *défini par* $\mathrm{U}_t(\omega)=\mathrm{V}_{\mathrm{X}_t(\omega)}$ *est le transport parallèle stochastique de* $\mathrm{V}_e$ *au-dessus de* X *pour la connexion* $\nabla^{\mathrm{L}}$.

3. *Soit* M *une semi-martingale à valeurs dans* $\mathfrak{g}$ ($\cong\mathrm{T}_e\mathrm{G}$). *Alors la semi-martingale* $\mathrm{X}=\varepsilon(\mathrm{M})$ *est le développement de* M *dans* G *pour la connexion* $\nabla^{\mathrm{L}}$.

Ce résultat figure dans [HD, L] avec une démonstration différente, puisqu'elle est faite dans une carte locale.

*Démonstration.* — 1. $\nabla^{L}_{\dot\gamma(t)} U = \nabla^{L}_{\dot\gamma(t)} V = 0$, donc U est bien un transport parallèle.

2. Le résultat précédent et le principe de transfert de Stratonovitch ([E], 7.24) permettent de conclure (nous faisons une interpolation de M par des chemins $C^\infty$ par morceaux, nous trouvons avec le résultat précédent le transport parallèle stochastique au-dessus de l'exponentielle stochastique de cette interpolation, et par passage à la limite, nous obtenons le résultat).

3. Il suffit de vérifier que le relèvement M' de X est égal à M.

La base $H_{X_t} = (H_{i\,X_t})_{1 \leq i \leq n}$ est le transport parallèle stochastique de $H_e$ au-dessus de X, donc $M' = \int \langle H_e H_X^{-1}, \delta X \rangle$. Or $H_e H_X^{-1} = (L_X^{-1})_*$, d'où $\delta M' = (L_X^{-1})_* (L_X)_* \delta M = \delta M$; par conséquent $M' = M$.

## 2. GROUPES SEMI-SIMPLES, MÉTRIQUE INVARIANTE ET MOUVEMENT BROWNIEN

### 2.1. Définition d'une métrique sur un groupe semi-simple

Un groupe de Lie est semi-simple si la forme de Killing $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ est non dégénérée.

Rappelons que B est symétrique, invariante par Ad(G) et vérifie $B(X, [Y, Z]) = B(Y, [Z, X])$ [H]. Si G est semi-simple, il existe une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{k}$ algèbre de Lie, B définie positive sur $\mathfrak{p}$ et définie négative sur $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ orthogonaux pour B.

De plus, l'application $\theta$ de $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ qui à $T + S$ associe $T - S$ est une involution orthogonale, et $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

On définit alors $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$.

La forme $B_\theta$ est définie positive sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux pour $B_\theta$. En outre, $B_\theta$ permet de définir une métrique invariante à gauche sur G en posant $\langle T_e L_g X, T_e L_g Y \rangle = B_\theta(X, Y)$ si $X, Y \in T_e G$.

### 2.2. Mouvements browniens dans les groupes semi-simples

La métrique invariante à gauche définie à partir de la forme de Killing ne donne pas en général les mêmes martingales que $\nabla^L$, car la connexion symétrisée de $\nabla^L$ n'est pas la connexion associée à cette métrique. Néanmoins, nous avons le résultat suivant sur les browniens.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* M *une semi-martingale à valeurs dans* $\mathfrak{g}$ *nulle en* 0. *Alors* M *est un mouvement brownien sur* $\mathfrak{g}$ *si et seulement si* $\varepsilon(M)$ *est un mouvement brownien sur* G *issu de* $e$.

*Démonstration.* — Soient $(H_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ et $M = M^i H_i$ un mouvement brownien sur $\mathfrak{g}$ nul en 0. Alors $\varepsilon(M)$ est une diffusion de générateur $1/2 \sum H_i^2$, [HD, L]. Or le laplacien sur G est égal à $\sum H_i^2$ ([T1]). Donc $\varepsilon(M)$ est un brownien.

Réciproquement, si $\varepsilon(M)$ est un brownien, alors $\varepsilon(M)$ a pour générateur $1/2 \sum H_i^2$ et les $M^i$ sont des browniens indépendants [HD, L].

## 3. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS, CONNEXION CANONIQUE, DÉVELOPPEMENT DES SEMI-MARTINGALES

Après avoir muni un espace homogène réductif d'une connexion définie par Nomizu [N], nous étudierons le développement des semi-martingales et la caractérisation des martingales. Nous nous plaçerons ensuite dans un espace symétrique de type non-compact muni d'une métrique compatible avec la connexion précédente, pour étudier le mouvement brownien.

### 3.1. Connexion canonique

Soient G un groupe de Lie et K un sous-groupe de Lie. L'espace homogène G/K est muni de sa structure canonique de variété $C^\infty$. Nous noterons $L_g$ $(g \in G)$ l'application de G/K dans G/K qui à $g'$K associe $gg'$K et $\pi$ la projection canonique de G dans G/K. Alors $L_g \circ \pi = \pi \circ L_g$.

Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K. On dit que G/K est réductif s'il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et $\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{p}) \subset (\mathfrak{p})$.

Il existe alors une connexion affine canonique invariante (telle que les applications $L_g$ soient affines [N]). Cette connexion est caractérisée par la propriété suivante : si U est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{p}$ tel que l'application $\varphi$ de U dans $\varphi(U) \subset G/K$ qui à $u$ associe $(\pi \circ \exp)(u)$ soit un difféomorphisme, et si X, $Y \in \mathfrak{p}$, alors $\nabla_{(\varphi_* X)_{\pi(e)}}(\varphi_* Y) = 0$, [N].

Soit Y' un champ de vecteurs $C^\infty$ sur G/K, et soit Y un champ de vecteurs sur G. On dira que Y est horizontal lorsque $Y_g$ est dans $T_e L_g \mathfrak{p}$ pour tout $g$, et que Y et Y' sont $\pi$-liés lorsque $Y'_{\pi(g)} = T_g \pi (Y_g)$ pour tout $g$. Si les deux propriétés sont réalisées, on dira que Y est le relèvement horizontal de Y'.

La proposition suivante et son corollaire permettent d'exprimer la dérivation covariante sur l'espace homogène en fonction de la connexion gauche du groupe.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $Y'$ (resp. $X'$) *un champ de vecteurs* $C^\infty$ *sur* $G/K$ *et* $Y$ (resp. $X$) *son relèvement horizontal. Alors* $Y$ *est de classe* $C^\infty$ *et les champs de vecteurs* $\nabla_{X'} Y'$ *et* $\nabla^L_X Y$ *sont* $\pi$*-liés* ($\nabla^L$ *est la connexion gauche sur* $G$).

COROLLAIRE 3.2. — *Soient* $A'$ *et* $B'$ *deux vecteurs de* $T_{\pi(g)} G/K$ *et* $A$, $B$ *les vecteurs de* $T_e L_g \mathfrak{p}$ *qui vérifient* $T_g \pi(A) = A'$, $T_g \pi(B) = B'$. *Alors*

$$\forall f \in C^\infty(G/K), \quad \operatorname{Hess} f(\pi(g))(A', B') \\ = \operatorname{Hess}^L(f \circ \pi)(g)(A, B) \quad (\operatorname{Hess} f \textit{ désigne } \nabla df).$$

*Démonstration du corollaire.* — On choisit deux champs de vecteurs $X'$ et $Y'$ sur $G/K$ qui coïncident avec $A'$ et $B'$ au point $\pi(p)$, et on note $X$ et $Y$ leurs relèvements horizontaux. Alors $X_g = A$, $Y_g = B$ et on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} f(\pi(g))(A', B') &= \operatorname{Hess} f(\pi(g))(X'_{\pi(g)}, Y'_{\pi(g)}) \\ &= X'_{\pi(g)}(Y' f) - \nabla_{X'_{\pi(g)}} Y' f \\ &= X_g Y(f \circ \pi) - T_g \pi(\nabla^L_{X_g} Y) f \text{ d'après la proposition} \\ &= (X_g Y - \nabla^L_{X_g} Y)(f \circ \pi) = \operatorname{Hess}^L(f \circ \pi)(g)(X_g, Y_g) \\ &= \operatorname{Hess}^L(f \circ \pi)(g)(A, B).\end{aligned}$$

*Démonstration de la proposition.* — Montrons que $Y$ est de classe $C^\infty$.

Remarquons que $Y$ est le relèvement horizontal de $Y'$ si et seulement si $L_{g*} Y$ est le relèvement horizontal de $L_{g*} Y'$. Il suffit donc de montrer que $Y$ est $C^\infty$ au voisinage de $e$. Nous pouvons remarquer aussi qu'il suffit de construire un champ de vecteurs $Y''$ de classe $C^\infty$ sur $G$ tel que $Y''$ et $Y'$ soient $\pi$-liés, car $Y$ s'obtiendra à partir de $Y''$ avec la formule $Y_g = (L_g)_* . p((L_{g^{-1}})_* . (Y''_g))$ où $p$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{p}$ parallèlement à $\mathfrak{k}$.

Soient $U$ et $V$ des voisinages de 0 dans $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}$ tels que l'application $u + v \mapsto \exp u \exp v$ réalise un difféomorphisme de $U \oplus V$ dans $\exp U \exp V$ et tels que $\varphi : U \to \varphi(U)$, $u \mapsto \pi \circ \exp u$ soit un difféomorphisme. Si $g = \exp u \exp v \in \exp U \exp V$, alors $Y''_g = T(R_{\exp v} \circ \exp \circ \varphi^{-1}) Y'_{\varphi(u)}$ convient, car

$$T\pi(T(R_{\exp v} \circ \exp \circ \varphi^{-1}) Y'_{\varphi(u)}) = T(\pi \circ R_{\exp v} \circ \exp \circ \varphi^{-1}) Y'_{\varphi(u)} = Y'_{\varphi(u)}$$

en vertu de l'égalité $\pi = \pi \circ R_{\exp v}$, et le dernier terme est bien égal à $Y'_{\pi(g)}$. L'expression de $Y''$ ainsi obtenue est $C^\infty$ sur $\exp U \exp V$.

Montrons que $\nabla_{X'} Y'$ et $\nabla^L_X Y$ sont $\pi$-liés, c'est-à-dire l'égalité $\nabla_{X'_{\pi(g)}} Y' = (\pi)_* (\nabla^L_{X_g} Y)$.

Elle est vraie pour $g = e$ et $X'$, $Y'$ définis sur $\varphi(U)$ par $X'_{\varphi(u)} = \pi_*(X''_{\exp u})$, $Y'_{\varphi(u)} = \pi_*(Y''_{\exp u})$, avec $X''$ et $Y''$ éléments de $\mathfrak{p}$, car le long de $t \mapsto \exp t X''_e$ pour $t$ petit, $Y''$ coïncide avec $Y$, donc $\nabla_{X_e} Y = 0$ et $\nabla_{X'_{\pi(e)}} Y' = 0$.

Elle est vraie pour $g=e$ et $X'$, $Y'$ quelconques: on écrit $Y'=\sum f^i Y'_i$ avec les $Y'_i$ comme dans le cas précédent; alors $Y=\sum (f^i \circ \pi) Y_i$ et

$$\nabla_{X'_{\pi(e)}} Y' = (X'_{\pi(e)} f^i) Y'_i = T_e \pi (X_e (f^i \circ \pi) Y_i) = T_e \pi (\nabla^L_{X_e} Y)$$

car $\nabla^L_{X_e} Y_i = 0$.

Ele est vraie pour $g$ quelconque: on se ramène à $g=e$ en utilisant la première remarque et le fait que les applications $L_g$ de G sont affines pour $\nabla^L$ et les applications $L_g$ de G/K sont affines pour $\nabla$.

### 3.2. Géodésiques, transport parallèle, développement des semi-martingales

La proposition du paragraphe précédent nous conduit aux résultats suivants sur le transport parallèle et le développement.

PROPOSITION 3.3. — 1. *Les géodésiques de* G/K *pour la connexion canonique sont les chemins* $\gamma$ *tels que* $\gamma(t)=\pi(g \exp tX)$ *avec* $g \in G$, $X \in \mathfrak{p}$.

2. *Si* $\gamma$ *est un chemin* $C^\infty$ *de* G/K *et si* $\psi$ *est un chemin de* G *dont la dérivée* $\dot{\psi}$ *appartient à* $\psi . \mathfrak{p} = (L_\psi)_* (\mathfrak{p})$ *et tel que* $\pi \circ \psi = \gamma$, *si de plus* U *est un transport parallèle au-dessus de* $\psi$ *et* $U \in \psi . \mathfrak{p}$, *alors* $t \mapsto (T_{\psi(t)} \pi) U(t)$ *est un transport parallèle au-dessus de* $\gamma$.

3. *Si* $X=\varepsilon(M)$, *avec* M *semi-martingale nulle en* 0 *et à valeurs dans* $\mathfrak{p}$, *et si* $U_t = V_{X_t}$ *où* V *est un élément de* $\mathfrak{p}$, *alors* $(T_{X_t} \pi) U_t$ *est un transport parallèle stochastique au-dessus de* $\pi(X)$.

4. *Si nous identifions* $T_{\pi(e)} G/K$ *à* $\mathfrak{p}$ *à l'aide de* $T_e \pi|_{\mathfrak{p}}$, *alors* $\pi \circ \varepsilon$ *est le développement dans* G/K *des semi-martingales de* $\mathfrak{p}$.

*Démonstration.* — 1. est une conséquence de 2.

2. Nous avons à établir l'égalité $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} T\pi U = 0$. Or puisque U est un relèvement horizontal de $T\pi U$ et $\dot{\psi}$ un relèvement horizontal de $\dot{\gamma}$, nous avons $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} T\pi U = T\pi (\nabla^L_{\dot{\psi}(t)} U)$ d'après la proposition 3.1, et le dernier terme est nul car U est un transport parallèle. Ceci achève la démonstration.

3. est une conséquence du résultat précédent et du principe de transfert de Stratonovitch.

4. Soient $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $\mathfrak{p}$, $M = \sum_{i=1}^{p} M^i H_i$ une semi-martingale de $\mathfrak{p}$ telle que $M_0 = 0$ et soit $X = \pi \varepsilon (M)$. Il suffit de montrer que M est le relèvement de X dans $\mathfrak{p}$. Notons $(V_i(t))_{1 \leq i \leq p}$ le transport parallèle stochastique de $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ au-dessus de X, et $(\theta^i)_{1 \leq i \leq p}$ sa base duale.

Montrons que $M^i = \int \langle \theta^i, \delta X \rangle$. Posons $Y = \varepsilon(M)$. Alors $V_i(t) = T_{Y_t} \pi H_{i\,Y_t}$ d'après (3) et

$$\int \langle \theta^i, \delta X \rangle = \int \langle T\pi^* \theta^i, \delta Y \rangle = \int \langle T\pi^* \theta^i, H_j \rangle \delta M^j$$
$$= \int \langle \theta^i, T\pi H_j \rangle \delta M^j = \int \delta^i_j \delta M^j = M^i_t.$$

### 3.3. Décomposition des semi-martingales de G et caractérisation des martingales de G/K

Soit $X = \varepsilon(M)$ une semi-martingale à valeurs dans G, issue de $e$. On écrit $M = M_{\mathfrak{k}} + M_{\mathfrak{p}}$, où $M_{\mathfrak{k}}$ est à valeurs dans $\mathfrak{k}$ et $M_{\mathfrak{p}}$ est à valeurs dans $\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 3.4. — *La semi-martingale* $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_t))\, \delta M_{\mathfrak{p}}$ *est le relèvement de* $\pi\varepsilon(M)$ *dans* $\mathfrak{p}$, *et c'est une martingale locale si et seulement si* $\pi\varepsilon(M)$ *est une martingale de* G/K.

*Démonstration.* — Pour montrer que $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, \delta M_{\mathfrak{p}}$ est à valeurs dans $\mathfrak{p}$, on écrit $M_{\mathfrak{p}} = M^i_{\mathfrak{p}} H_i$ et $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, \delta M_{\mathfrak{p}} = \int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, H_i\, \delta M^i_{\mathfrak{p}}$. La semi-martingale $\varepsilon(M_{\mathfrak{k}})$ est à valeurs dans K (car l'exponentielle stochastique de G restreinte aux semi-martingales de $\mathfrak{k}$ coïncide avec l'exponentielle stochastique de K), donc $\mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, H_i$ est une semi-martingale à valeurs dans $\mathfrak{p}$ quel que soit $i$.

Ensuite, la décomposition (1.2.3) entraîne

$$\pi\varepsilon(M) = \pi\varepsilon\left(\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, \delta M_{\mathfrak{p}}\right); \qquad \text{or} \qquad \int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, \delta M_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p},$$

donc $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\, \delta M_{\mathfrak{p}}$ est le relèvement de $\pi\varepsilon(M)$, d'après la proposition (3.3).

Si nous considérons le fait que le relèvement transforme les martingales d'une variété en martingales locales de l'espace tangent, et le développement transforme les martingales locales de l'espace tangent en martingales de la variété ([E], 8.26), nous obtenons la dernière assertion de la proposition.

*Relèvement dans* G *des martingales de* G/K. — Si $X = \pi\varepsilon(M_{\mathfrak{p}})$ est une martingale de G/K, alors $\varepsilon(M_{\mathfrak{p}})$ est le relèvement canonique de X dans G.

C'est aussi une martingale pour $\nabla^L$. Un relèvement quelconque dans G s'écrit

$$\varepsilon(M'_{\mathfrak{p}}+M_{\mathfrak{k}}) \qquad \text{avec} \qquad \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\,\delta M'_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}},$$

ou $M'_{\mathfrak{p}} = \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}})^{-1})\,\delta M_{\mathfrak{p}}$, et on pourrait montrer que $\varepsilon(M'_{\mathfrak{p}}+M_{\mathfrak{k}})$ est une martingale si $M_{\mathfrak{p}}$ et $M_{\mathfrak{k}}$ sont orthogonaux.

### 3.4. Espaces symétriques de type non-compact, métrique canonique et mouvement brownien

Soient G un groupe de Lie connexe, $\sigma$ un automorphisme involutif de G et $K_\sigma$ le sous-groupe de G des points fixes de $\sigma$. On dit qu'un espace homogène G/K est symétrique lorsque $K_\sigma^0 \subset K \subset K_\sigma$ ($K_\sigma^0$ est la composante connexe de $K_\sigma$ contenant $e$). Si G/K est symétrique, la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ vérifie en plus des propriétés de (3.1) la propriété $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. La connexion canonique est sans torsion et est la connexion de Levi-Civita associée à toute métrique invariante sur G/K [N].

On dit que G/K est symétrique de type non-compact lorsque de plus G est semi-simple non compact, et la décomposition $\mathfrak{g}= \oplus\,\mathfrak{p}$ est de Cartan. La restriction de $B_\theta$ à $\mathfrak{p}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive invariante par Ad(K), et si on identifie $\mathfrak{p}$ à $T_{\pi(e)}G/K$, elle permet de définir une métrique sur G/K telle que les applications $L_g$, ($g \in G$) soient des isométries: pour X, Y appartenant à $T_{\pi(e)}G/K$, $g$ appartenant à G, $\langle TL_g X, TL_g Y\rangle = B_\theta(X, Y)$. La connexion associée à cette métrique est donc la connexion canonique sur l'espace symétrique [N].

PROPOSITION 3.5. — *Soit* $M=M_{\mathfrak{k}}+M_{\mathfrak{p}}$ *une semi-martingale nulle en* 0, *à valeurs dans* $\mathfrak{g}$. *Alors nous avons les propriétés suivantes*

1. *Le processus* $\pi\varepsilon(M)$ *est un brownien si et seulement si* $\int \operatorname{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\,\delta M_{\mathfrak{p}}$ *est un brownien.*

2. *Si* $M_{\mathfrak{p}}$ *et* $M_{\mathfrak{k}}$ *sont orthogonales et si* $M_{\mathfrak{p}}$ *est une martingale locale* (resp. *un brownien*), *alors* $\pi\varepsilon(M)$ *est une martingale* (resp. *un brownien*).

*Démonstration.* — 1. Découle de la proposition (3.4) et du fait que le relèvement transforme les browniens d'une variété en browniens de l'espace tangent, et le développement transforme les browniens de l'espace tangent en browniens de la variété ([E], 8.26).

2. Résulte de (1.2.8): $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\,\delta M_{\mathfrak{p}} = \int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\,dM_{\mathfrak{p}}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ et $M_{\mathfrak{k}}$ sont orthogonales, et comme $\mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}})$ est une transformation orthogonale de $\mathfrak{p}$, $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(M_{\mathfrak{k}}))\,dM_{\mathfrak{p}}$ est un mouvement brownien si et seulement si $M_{\mathfrak{p}}$ est un mouvement brownien.

## 4. MOUVEMENT BROWNIEN DANS LES ESPACES SYMÉTRIQUES DE TYPE NON-COMPACT : DÉCOMPOSITION D'IWASAWA ET DE CARTAN

En application de tout ce qui a été fait jusqu'à maintenant, nous retrouvons les décompositions de Cartan et Iwasawa du brownien dans un espace symétrique de type non-compact, effectuées par M. P. et P. Malliavin. Les résultats de géométrie que nous utiliserons sont brièvement énoncés ici, mais on pourra trouver des détails dans les articles de Taylor, et en particulier la référence à $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ qui aide à la compréhension.

### 4.1. Décomposition d'Iwasawa : rappels

Nous utiliserons les notations du paragraphe précédent : G est un groupe de Lie semi-simple connexe non compact, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ (décomposition de Cartan).

Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{q}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$ pour $B_\theta$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'écrit alors comme somme directe orthogonale pour $B_\theta$ d'espaces propres $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{a}, \mathrm{ad}(H)(X) = \alpha(H)X\}$ avec $\alpha : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ racine de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\alpha \neq 0} \mathrm{Ker}\,\alpha$ et $\mathfrak{a}^+$ une composante connexe de $\mathfrak{a}'$ (chambre de Weyl).

Si $\alpha$ est une racine, on écrit $\alpha > 0$ si $\forall H \in \mathfrak{a}^+$, $\alpha(H) > 0$. On pose $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. C'est l'algèbre de Lie du sous-groupe analytique fermé N.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est associée au sous-groupe analytique fermé A, et nous avons un difféomorphisme $C^\infty$ de $N \times A \times K$ dans G qui à $(n, a, k)$ associe $nak$.

Si $\alpha$ est une racine, l'involution $\theta$ induit une isométrie de $\mathfrak{g}_\alpha$ dans $\mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Soit $(N_i)_{1 \leq i \leq q}$ une base orthonormale de $\mathfrak{n}$ telle que $\forall i$, $\exists \alpha_i$, $N_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Posons

$$P_i = Q_i = 1/\sqrt{2}\,(N_i - \theta(N_i)).$$

Alors $(Q_i)_{1 \leqq i \leqq q}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{q}$.

Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{l}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$. Posons $L_i = 1/\sqrt{2}\,(N_i + \theta(N_i))$. Alors $(L_i)_{1 \leqq i \leqq q}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{l}$ et l'application linéaire $\tau$ de $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{l}$ qui à $Q_i$ associe $L_i$ est une isométrie. On a de plus l'égalité $N_i = 1/\sqrt{2}\,(L_i + Q_i)$. Notons que les $Y_i$ de Taylor [T2] sont différents des $N_i$, ce qui conduit à des formules différentes.

PROPOSITION 4.1. — *Nous avons les propriétés suivantes*:

1. $\forall H \in \mathfrak{a}$, $\operatorname{ad}(H)(L_i) = \alpha_i(H)\,Q_i$ *et* $\operatorname{ad} H(Q_i) = \alpha_i(H)\,L_i$ *et par conséquent*: $e^{\operatorname{ad}(H)}(L_i) = \operatorname{ch}\alpha_i(H)\,L_i + \operatorname{sh}\alpha_i(H)\,Q_i$.

2. *Si on note* $H_{\alpha_i}$ *l'élément de* $\mathfrak{a}$ *tel que* $\forall H \in \mathfrak{a}$, $\alpha_i(H) = B_\theta(H_{\alpha_i}, H)$, *alors* $[L_i, Q_i] = H_{\alpha_i}$.

3. *L'élément* $H_+ = 1/2 \sum_{i=1}^{q} H_{\alpha_i}$ *appartient à* $\mathfrak{a}^+$.

*Démonstration :*

1. $$[H, L_i] = \frac{1}{\sqrt{2}}[H, N_i + \theta(N_i)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_i(H)\,N_i - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_i(H)\,\theta(N_i) = \alpha_i(H)\,Q_i$$

car $N_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ et $\theta(N_i) \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. La démonstration est identique pour $[H, Q_i]$. On en déduit $(\operatorname{ad}(H))^{2n}(L_i) = \alpha_i(H)^{2n}\,L_i$ et $(\operatorname{ad} H)^{2n+1}(L_i) = \alpha_i(H)^{2n+1}\,Q_i$, d'où la formule donnant $e^{\operatorname{ad}(H)}(L_i)$.

2. Soit $H \in \mathfrak{a}$; on sait que $[L_i, Q_i] \in \mathfrak{p}$; d'après l'identité de Jacobi,

$$[H, [L_i, Q_i]] = [L_i, [H, Q_i]] - [Q_i, [H, L_i]] = [L_i, \alpha_i(H)\,L_i] - [Q_i, \alpha_i(H)\,Q_i] = 0,$$

par conséquent $[L_i, Q_i] \in \mathfrak{a}$ et

$$\begin{aligned} B_\theta(H, [L_i, Q_i]) &= B(H, [L_i, Q_i]) = B(L_i, [Q_i, H]) = -B(L_i, \alpha_i(H)\,L_i) \\ &= \alpha_i(H)\,B_\theta(L_i, L_i) = \alpha_i(H) = B_\theta(H, H_{\alpha_i}) \end{aligned}$$

donc $[L_i, Q_i] = H_{\alpha_i}$.

3. *Cf.* [T2].

### 4.2. Les coordonnées du mouvement brownien dans la décomposition d'Iwasawa

Le difféomorphisme de $N \times A \times K$ dans $G$ nous permet de définir un difféomorphisme $\pi|_{NA}$ de $NA$ dans $G/K$. L'ensemble $NA$ est un sous-groupe de Lie de $G$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. Le but de cette partie est de trouver une semi-martingale à valeurs dans $NA$ dont le projeté par $\pi$ soit un brownien de $G/K$ issu de $\pi(e)$.

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $X$ *une semi-martingale à valeurs dans* $G/K$ *telle que* $X_0 = \pi(e)$. *Alors* $X$ *est un mouvement brownien si et seulement si* *il existe deux processus* H *et* $n$ *à valeurs dans* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{n}$ *respectivement, tels que*

1. $X = \pi(\varepsilon(n) \exp H)$,
2. $H_t = H_m(t) - H_+ t$ *où* $H_m$ *est un brownien de* $\mathfrak{a}$ *et* $H_+$ *est l'élément de* $\mathfrak{a}^+$ *défini dans la proposition* (4.1),
3. $n_t = \sqrt{2} \int_0^t \operatorname{Ad}(\exp H_s)\, dv_s$ *où* $v$ *est un brownien de* $\mathfrak{n}$ *nul en* 0, *indépendant de* $H_m$.

*De plus, si* H *et* $n$ *vérifient les deux dernières propriétés, alors* $\varepsilon(n)$ *est une martingale convergente de* N.

Ce résultat est dû à M. P. et P. Malliavin [M, M]. Il est identique à celui de Taylor ([T1], théorèmes 6.3 et 7.1), mais la formulation est différente et nous écrivons le laplacien après avoir déterminé le mouvement brownien. Dans la démonstration qui va suivre, nous utiliserons essentiellement la proposition [3.5(1) et (2)] qui donne les semi-martingales de G dont la projection dans G/K est un brownien, et le calcul de l'exponentielle stochastique d'une somme de semi-martingales (1.2.3).

*Démonstration.* — Soit X une semi-martingale de G/K issu de $\pi(e)$. La décomposition d'Iwasawa et le relèvement des semi-martingales de N et A nous permettent d'écrire $X = \pi(\varepsilon(n) \exp H)$ avec $n$ semi-martingale à valeurs dans $\mathfrak{n}$ nulle en 0 et H semi-martingale à valeurs dans $\mathfrak{a}$ nulle en 0. Ensuite, $\varepsilon(n) \exp H = \varepsilon(n' + H)$ avec $n' \in \mathfrak{n}$ et $n = \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(H))\, \delta n'$ d'après la propriété (1.2.3). A la semi-martingale $n'$ nous associons la semi-martingale $q$ de $\mathfrak{q}$ telle que $n' = q + \tau(q)$, $\tau(q) = l$ étant un élément de $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l} \subset \mathfrak{k}$). Le processus $n' + H$ se décompose dans $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ en la somme $l + p$ si on pose $p = q + H$. Donc $\varepsilon(n' + H) = \varepsilon(p + l) = \varepsilon\left(\int \operatorname{Ad}(\varepsilon(l))\, \delta p\right) \varepsilon(l)$ toujours d'après (1.2.3), et $p' = \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(l))\, \delta p$ est le relèvement dans $\mathfrak{p}$ de X. Donc X est un brownien si et seulement si $p'$ est un brownien.

D'après la propriété (1.2.8), la partie martingale de $p'$ est

$$p'_m = \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(l))\, dp_m$$

et sa partie à variation finie est

$$p'_d = \int \operatorname{Ad}(\varepsilon(l)) \left( dp_d + \frac{1}{2} [L_i, P_j]\, d\langle l^i, p^j \rangle \right)$$

si on note $l = l^i\, L_i = q^i\, L_i$ et $p = p_m + p_d = p^j\, P_j$, les $P_j$ désignant les éléments $Q_j$ pour $j \leq q$, et les éléments d'une base orthonormale de $\mathfrak{a}$ pour

$j>q$. Par conséquent, X est un brownien si et seulement si $p'_m$ est un brownien et $p'_d=0$. Or $\mathrm{Ad}(\varepsilon(l))$ est à valeurs dans l'ensemble des transformations orthogonales de $\mathfrak{p}$ donc $p'_m$ est un brownien, si et seulement si $p_m$ est un brownien ou encore si et seulement si $q_m$ et $\mathrm{H}_m$ sont des browniens indépendants.

Supposons que X soit un brownien. Alors $d\langle l^i, p^j\rangle = d\langle p^i, p^j\rangle = \delta^{ij}\,dt$ donc $[\mathrm{L}_i, \mathrm{P}_j]\,d\langle l^i, p^j\rangle = [\mathrm{L}_i, \mathrm{P}_i]\,dt = 2\,\mathrm{H}_+\,dt$ d'après la proposition (4.1.2). Puisque $p'_d=0$, on a $p_d=-\mathrm{H}_+\,t$ et donc $q_d=0$ et $\mathrm{H}_d=-\mathrm{H}_+\,t$. En résumé, $q=q_m$ est un brownien de $\mathfrak{q}$ et $\mathrm{H}_t=\mathrm{H}_m(t)-\mathrm{H}_+\,t$ avec $\mathrm{H}_m$ brownien de $\mathfrak{a}$ indépendant de $q_m$. Il reste à calculer $n$ :

$$n'=q+\tau(q)=q^i(\mathrm{Q}_i+\mathrm{L}_i)=\sqrt{2}\,(q^i\,\mathrm{N}_i)=\sqrt{2}\,\nu \qquad \text{et} \qquad \nu=q^i\,\mathrm{N}_i$$

est un brownien de $\mathfrak{n}$. D'où $n=\sqrt{2}\int \mathrm{Ad}(\exp \mathrm{H})\,d\nu$.

Pour la réciproque, il suffit de remonter les derniers calculs.

Il reste à montrer la convergence de $n$. On a

$$\int \mathrm{Ad}(\exp \mathrm{H})\,d\nu = \int e^{\mathrm{ad}(\mathrm{H})}(\mathrm{N}_i)\,dq^i = \int e^{\alpha_i(\mathrm{H})}\,\mathrm{N}_i\,dq^i.$$

Ce processus est une martingale de variation quadratique totale $\int_0^\infty e^{2\,\alpha_i(\mathrm{H}_t)}\,dt$. Or $\alpha_i(\mathrm{H}_t)=t\,\alpha_i\left(\frac{(\mathrm{H}_m)_t}{t}-\mathrm{H}_+\right)$ et comme $\frac{(\mathrm{H}_m)_t}{t}-\mathrm{H}_+$ converge vers $-\mathrm{H}_+$ et $\alpha_i(-\mathrm{H}_+)<0$ d'après la proposition (4.1.3), la dernière intégrale converge. Le processus $n$ est donc une martingale convergente, et en utilisant [HD, L], proposition 8, on en déduit que $\varepsilon(n)$ est une martingale convergente. Ceci achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 4.3. — *Soit* $(\mathrm{H}_i)_{1\leq i\leq r}$ *une base orthonormale de* $\mathfrak{a}$. *Alors si on identifie* G/K *au groupe* NA, *le laplacien s'écrit*

$$2\sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}_i^2+\sum_{i=1}^{r}\mathrm{H}_i^2-2\,\mathrm{H}_+.$$

*Démonstration.* — Il suffit de faire le calcul en $e$. Le mouvement brownien s'écrit $\varepsilon(n'+\mathrm{H})=\mathrm{Y}$ avec les notations de la preuve du théorème. De plus, $n'_t+\mathrm{H}_t=\sqrt{2}\,\nu_t+\mathrm{H}_{mt}-\mathrm{H}_+\,t$. Le processus Y est donc une diffusion de générateur $\mathrm{L}=\sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}_i^2+1/2\sum_{i=1}^{r}\mathrm{H}_i^2-\mathrm{H}_+$ ([HD, L], proposition 4).

Par conséquent, $\forall f\in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{NA})$, $\int 1/2\,\Delta_{\mathrm{NA}}f(\mathrm{Y})\,dt=\int \mathrm{L}f(\mathrm{Y})\,dt$. En dérivant en 0, nous obtenons $1/2\,\Delta_{\mathrm{NA}}f(e)=(\mathrm{L}\,f)(e)$, d'où $\Delta_{\mathrm{NA}}(e)=2\,\mathrm{L}(e)$.

### 4.3. Les coordonnées du mouvement brownien dans la décomposition de Cartan

Soit M le centralisateur de A dans K. C'est un sous-groupe de Lie de K qui admet $\mathfrak{m}$ pour algèbre de Lie. Définissons $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$. Alors l'application $\varphi$ de $K/M \times A^+$ dans $G/K$ qui à $(\dot{k}, a)$ associe $\pi(ka)$ ($\dot{k}$ désigne la classe de $k$ dans K/M) est régulière et injective, et son image est dense dans G/K.

Nous allons munir K/M d'une connexion. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est somme directe de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$, et nous allons montrer que $\mathrm{Ad}(M)(\mathfrak{l}) \subset (\mathfrak{l})$. Nous pourrons ensuite définir une connexion sur K/M de la même façon que dans la partie 3.

LEMME 4.4 :

$$\mathrm{Ad}(M)(\mathfrak{l}) \subset (\mathfrak{l}).$$

*Démonstration.* — Soient $m \in M$, $H \in \mathfrak{a}$. Pour tout $i$,

$$\begin{aligned}[H, \mathrm{Ad}(m)(N_i)] &= \mathrm{Ad}(m)([\mathrm{Ad}(m^{-1})(H), N_i]) \\ &= \mathrm{Ad}(m)([H, N_i]) = \alpha_i(H)\,\mathrm{Ad}(m)(N_i)\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ad}(m)(N_i) \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. De plus, $\mathrm{Ad}(m)$ commute avec $\theta$ car $\mathrm{Ad}(m)$ conserve les espaces propres de $\theta$. Il résulte que

$$\mathrm{Ad}(m)(L_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Ad}(m)(N_i) + \theta(\mathrm{Ad}(m)(N_i)))$$

est un élément de $\mathfrak{l}$. Le lemme est montré.

*Décomposition du mouvement brownien de* G/K *dans* $K/M \times A^+$. — Soit $H_0 \in \mathfrak{a}^+$; $\pi(\exp H_0)$ est un élément de $\varphi(K/M \times A^+)$; la décompositon dans $K/M \times A^+$ d'un mouvement brownien de G/K issu de $\pi(\exp H_0)$ consiste à trouver un processus $l$ à valeurs dans $\mathfrak{l}$, nul en 0 et un processus H à valeurs dans $\mathfrak{a}^+$ tels que H soit issu de $H_0$ et $\pi(\varepsilon(l) \exp H)$ soit un brownien de G/K (la composante de K/M recherchée sera $\pi' \varepsilon(l)$ où $\pi'$ désigne la projection canonique de K dans K/M).

Soit $g_0 = \exp H_0$.

PROPOSITION 4.5. — *Soit* X *une semi-martingale à valeurs dans* G/K *telle que* $X_0 = \pi(g_0)$. *Alors* X *est un mouvement brownien si et seulement si il existe deux processus* H *et* $l$ *à valeurs dans* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{l}$ *respectivement tels que*

1. $X = \pi(\varepsilon(l) \exp H)$,
2. H *est solution issue de* $H_0$ *de l'équation différentielle stochastique*

$$dH = dH'_m + 1/2 \sum_{\alpha > 0} m_\alpha H_\alpha \coth \alpha(H)\, dt \quad \text{(E)}$$

*où* $m_\alpha$ *est la dimension de* $\mathfrak{g}_\alpha$ *et* $H'_m$ *est un brownien de* $\mathfrak{a}$ *nul en* 0,

3. $l=\sum_{i=1}^{q}\left(\int -\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_i(\mathrm{H})}dq^i\right)\mathrm{L}_i$ *où* $q=\sum_{i=1}^{q} q^i \mathrm{Q}_i$ *est un brownien indépendant de* $\mathrm{H}'_m$. *De plus* $l$, $\varepsilon(l)$ *et* $\pi'\varepsilon(l)$ *sont des martingales convergentes si* (2) *et* (3) *sont réalisées.*

Cette décomposition est due à M. P. et P. Malliavin [M, M]. J. C. Taylor la retrouve dans [T2] ainsi que la convergence de la composante dans K/M. Sa démarche est inverse de la démonstration qui va suivre puisqu'il écrit d'abord le laplacien dans $\mathrm{K/M}\times\mathrm{A}^+$ et détermine ensuite une diffusion dont le générateur est ce laplacien.

*Remarque.* — La dernière assertion de la proposition découle du résultat suivant montré par Orihara [O].

LEMME 4.6. — *L'équation* (E) *admet une solution sur* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans* $\mathfrak{a}^+$. *De plus,*

$$\mathrm{P}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{H}_t}{t}=1/2\sum_{\alpha>0} m_\alpha \mathrm{H}_\alpha\right)=1.$$

*Démonstration de la proposition.* — Soit X une semi-martingale de G/K issue de $\pi(g_0)$. On suppose que X est à valeurs dans $\varphi(\mathrm{K/M}\times\mathrm{A}^+)$. Alors l'application $\varphi$ et le relèvement des semi-martingales nous permettent d'écrire $\mathrm{X}=\pi(\varepsilon(l)\exp\mathrm{H})$ où $l$ et H sont des semi-martingales de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{a}$ respectivement, avec H issue de $\mathrm{H}_0$ et $l$ nulle en 0. Nous allons exprimer X comme le développement d'une semi-martingale de $\mathfrak{p}$ que nous allons calculer à partir de $l$ et H.

Posons $\mathrm{H}'=\mathrm{H}-\mathrm{H}_0$, et cherchons le relèvement de $\varepsilon(l)\exp\mathrm{H}$ dans $\mathrm{T}_{g_0}\mathrm{G}$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(l)\exp\mathrm{H}\\
&\quad=\varepsilon(l)\exp\mathrm{H}_0\exp\mathrm{H}'=g_0\,\mathrm{Int}(g_0^{-1})(\varepsilon(l))\exp\mathrm{H}'\\
&\quad=g_0\,\varepsilon\left(\int\mathrm{Ad}(g_0^{-1})\,dl\right)\varepsilon(\mathrm{H}')\ \text{d'après (1.2.5)},\\
&\quad=g_0\,\varepsilon\left(\int\mathrm{Ad}(\varepsilon(\mathrm{H}')^{-1})\,\delta\left(\int\mathrm{Ad}(g_0^{-1})\,dl\right)+\mathrm{H}'\right)\ \text{d'après (1.2.3)}\\
&\quad=g_0\,\varepsilon\left(\int\mathrm{Ad}((\exp\mathrm{H}')^{-1}g_0^{-1})\,\delta l+\mathrm{H}'\right)=g_0\,\varepsilon\left(\int\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{H}))\,\delta l+\mathrm{H}'\right).
\end{aligned}$$

Décomposons $\int\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{H}))\,\delta l+\mathrm{H}'$ dans $\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ :

$$\int\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{H}))\,\delta l+\mathrm{H}'=l'+p=l'+q+\mathrm{H}''$$

avec $l'\in\mathfrak{l}$, $p\in\mathfrak{p}$, $q\in\mathfrak{q}$, $\mathrm{H}''\in\mathfrak{a}$.

Le relèvement de X dans $\mathfrak{p}$ est $p'=\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(l'))\,\delta p$. Par conséquent, X est un brownien si et seulement si $p'$ est un brownien.

On désigne par $(\mathrm{H}_i)$ une base orthonormale de $\mathfrak{a}$ et on note $\mathrm{H}=h^i \mathrm{H}_i$, $l'=l'^i \mathrm{L}_i$, $p=p^i \mathrm{P}_i$, $l=l^i \mathrm{L}_i$, $q=q^i \mathrm{Q}_i$ ($\mathrm{P}_i=\mathrm{Q}_i$ pour $i \leqq q$ et $\mathrm{P}_i=\mathrm{H}_{i-q}$ pour $i>q$).

Avec la décomposition $p=p_m+p_d$ et le résultat (1.2.8), la partie martingale de $p'$ s'écrit $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(l'))\,dp_m$ et sa partie à variation finie s'écrit $\int \mathrm{Ad}(\varepsilon(l'))\,(dp_d+1/2\,[\mathrm{L}_i, \mathrm{P}_j]\,d\langle l'^i, p^j\rangle)$. Et comme $\mathrm{Ad}(\varepsilon(l'))$ est une transformation orthogonale de $\mathfrak{p}$, $p'$ est un brownien si et seulement si

(1) $p_m$ est un brownien et

(2) $\int dp_d+1/2\,[\mathrm{L}_i, \mathrm{P}_j]\,d\langle l'^i, p^j\rangle=0$.

Exprimons maintenant $l'$ et $p$ en fonction de H et $l$:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{H}))\,\delta l &= \int e^{\mathrm{ad}(-\mathrm{H})}\,\delta l \\ &= \int e^{\mathrm{ad}(-\mathrm{H})}(\mathrm{L}_i)\,dl^i - 1/2\int \mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{H}))([\mathrm{H}_i, \mathrm{L}_j])\,d\langle h^i, l^j\rangle \text{ d'après } (1.2.6) \\ &= \int (\mathrm{ch}\,\alpha_i(\mathrm{H})\,\mathrm{L}_i - \mathrm{sh}\,\alpha_i(\mathrm{H})\,\mathrm{Q}_i)\,dl^i - 1/2\int e^{-\mathrm{ad}(\mathrm{H})}([\mathrm{H}_i, \mathrm{L}_j])\,d\langle h^i, l^j\rangle.\end{aligned}$$

La partie martingale de cette expression est

$$\int \mathrm{ch}\,\alpha_i(\mathrm{H})\,\mathrm{L}_i\,dl^i_m - \int \mathrm{sh}\,\alpha_i(\mathrm{H})\,\mathrm{Q}_i\,dl^i_m.$$

La première intégrale est dans $\mathfrak{k}$ et la deuxième est dans $\mathfrak{q}$, et nous en déduisons $p_m=\mathrm{H}'_m-\int \mathrm{sh}\,\alpha_i(\mathrm{H})\,\mathrm{Q}_i\,dl^i_m$.

Supposons que X soit un brownien. Notons

$$\mathrm{T}=\inf\{t>0,\ \mathrm{X}_t \notin \varphi(\mathrm{K/M}\times\mathrm{A}^+)\},$$

et calculons les coordonnées de X pour des temps inférieurs à T. D'après (1), $p_m=q_m+\mathrm{H}''_m$ est un brownien, donc $\mathrm{H}''_m$ et $q_m$ sont des browniens indépendants. Comme $dl^i_m=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_i(\mathrm{H})}\,dq^i_m$, on a $\langle h^i, l^j\rangle=0$

pour tout $i$, $j$, donc

$$p_d = H'_d - \int \operatorname{sh} \alpha_i(H)\, Q_i\, dl_d^i.$$

Nous obtenons $l' = \int \operatorname{ch} \alpha_i(H)\, L_i\, dl^i$ et $H'' + q = p = H' - \int \operatorname{sh} \alpha_i(H)\, Q_i\, dl^i$ ce qui donne $H'' = H'$ et $q = -\int \operatorname{sh} \alpha_i(H)\, Q_i\, dl^i$.

Il reste à exprimer la condition (2) à l'aide de ces égalités. Le terme $1/2\, [L_i, P_j]\, d\langle l'^i, p^j \rangle$ devient

$$\begin{aligned} &1/2\, [L_i, Q_j]\, (-\operatorname{sh} \alpha_j(H)) \operatorname{ch} \alpha_i(H)\, d\langle l^i, l^j \rangle \\ &\qquad = -1/2\, [L_i, Q_i] \coth \alpha_i(H)\, dt = -1/2 \sum_{\alpha > 0} m_\alpha H_\alpha \coth \alpha(H)\, dt \end{aligned}$$

d'après la proposition 4.1. On trouve en écrivant (2)

$$dp_d = 1/2 \sum_{\alpha > 0} m_\alpha H_\alpha \coth \alpha(H)\, dt$$

donc $q_d = 0$ et $dH_d = dp_d$. Alors X reste p.s. dans $\varphi(K/M \times A^+)$ d'après le lemme (4.6), et $T \equiv +\infty$.

En conclusion, $l = l_m = l^i L_i$ avec

$$l^i = -\int \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_i(H)}\, dq_m^i,$$

$l$ est une martingale locale, H vérifie

$$dH = dH'_m + 1/2 \sum_{\alpha > 0} m_\alpha H_\alpha \coth \alpha(H)\, dt,$$

$q_m$ et $H'_m$ sont des browniens indépendants.

La réciproque est claire en remontant les calculs.

Il reste à montrer que $l$, $\varepsilon(l)$ et $\pi' \varepsilon(l)$ sont des martingales convergentes. Le crochet de $l$ vérifie

$$\langle l^i, l^i \rangle_\infty = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i(H_t)}\, dt.$$

Posons $\lambda_i = \alpha_i(H_+)\ (>0)$; $\dfrac{\alpha_i(H_t)}{t}$ converge presque sûrement vers $\lambda_i$ d'après le lemme (4.6), donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i(H_t)}\, dt < \infty$. Par conséquent, $l^i$ converge p.s., donc il en est de même pour $l$. D'après [HD, L], proposition 8, $\varepsilon(l)$ converge dans K, donc $\pi' \varepsilon(l)$ converge p.s. dans K/M.

# RÉFÉRENCES


[E] M. EMERY, *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer Verlag, 1989.

[HD, L] M. HAKIM-DOWEK et D. LÉPINGLE, L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, *Séminaire de Probabilités* 20, *Lecture Notes in Math.*, **1204**, 1986, p. 352-374.

[H] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[M, M] P. et M. P. MALLIAVIN, Factorisation et lois limites de la diffusion horizontale au-dessus d'un espace riemannien symétrique, *Lecture Note*, **404**, p. 164-217.

[N] K. NOMIZU, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, vol. **76**, 1954, p. 33-65 (MR 15, 468).

[O] A. ORIHARA, On random ellipsoids, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.* 1*A*, *Math.*, **17**, 1970, p. 73-85.

[T1] J. C. TAYLOR, The Iwasawa decomposition and the limiting behaviour of brownian motion on a symmetric space of non-compact type, *Contemporary Mathematics*, **73**, 1988, p. 303-332.

[T2] J. C. TAYLOR, Brownian motion on a symmetric space of non-compact type: asymptotic behaviour in polar coordinates, *Canadian J. of Mathematics*, vol. **43**(5), 1991, pp. 1065-1085.


(*Manuscrit reçu le* 22 *novembre* 1991;
*révisé le* 4 *juillet* 1992.)