

Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 56- Exponentielle de matrices. Applications.

Commentaires du jury 2015 : C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = (L_1, L_2)$ avec $L_1 = (-1, 1)$, $L_2 = (0, -1)$ est-elle dans l'image $\exp(\text{Mat}(2, \mathbb{R}))$? La matrice blocs B avec A , A sur la diagonale est-elle dans l'image $\exp(\text{Mat}(4, \mathbb{R}))$?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Pour les candidats plus aguerris, les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire y sont tout à fait à propos. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement. Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité sur la question.

Commentaires du jury 2016 : Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = (L_1, L_2)$ avec $L_1 = (-1, 1)$, $L_2 = (0, -1)$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels? La matrice blocs B avec A , A sur la diagonale est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ou vers les algèbres de Lie.

Références : Vous trouverez presque tout sur l'exponentielle dans [F. M. 1] n°38 et errata à la page 87.

Bibliographie

- [F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
- [F. M. 1'] Errata, <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf>
- [F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
- [F. M. 2'] Compléments et errata, <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mmatigno/Errata-FM2.pdf>
- [Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
- et
- [C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Développements conseillés :

- (1) Image de l'exponentielle réelle, [F. M. 1] n°38 question 3 p. 83.
- (2) $\exp : \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, [Fr. B-C-D] p. 284 et [C. G.] tome 1 p. 208.

- (3) Application de la décomposition polaire à l'étude de $O(p, q)$, [F. M. 2] p. 105 et [C. G.] tome 1 p. 210.

Exercice 1 On suppose que A est une matrice de $M_n(K)$ et que $P(A) = 0$ avec $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$, voir [F. M. 1] p. 88 pour le cas général.

Montrer que $A^k = (Id + k(A - Id))p_1(A) + 2^k p_2(A)$ pour $k \in \mathbb{N}$ où $p_1 = -X(X - 2)$, $p_2(X) = (X - 1)^2$. En déduire que si $K = \mathbb{C}$ et $t \in K$ alors $\exp(tA) = e^t(Id + t(A - Id))p_1(A) + e^{2t}p_2(A)$.

Exercice 2 Exponentielles et les équations différentielles linéaires $M'(t) = AM(t)$. Le cas le polynôme caractéristique n'a pas de racines réelles, voir [F. M. 1] p. 90 pour le cas général.

- (1) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, on suppose que χ_A n'a pas de racines réelles, montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ avec

$$A = P^{-1}R(\theta)P \text{ où } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ est la matrice de rotation de mesure d'angle } \theta.$$

Preuve. Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, alors

$\chi_A := X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$ avec $\Delta := (a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine alors $\chi_A = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$. Alors $\lambda = \rho \cos \theta$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{++}$ et $0 < \theta < 2\pi$ et $\theta \neq \pi$. Ainsi $\chi_A = X^2 - 2\rho \cos \theta X + \rho^2 = \chi_{R(\theta)}$, $\text{signe}(a + d) = \text{signe} \cos \theta$ et $\rho^2 = ad - bc$.

Puisque χ_A est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, il suit qu'il coïncide avec le polynôme minimal de A ; ainsi A et $R(\theta)$ sont semblables réelles à la même matrice compagnon et donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ avec $A = P^{-1}R(\theta)P$.

- (2) Application à la résolution de l'équation différentielle $Z'(t) = AZ(t)$ où $Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$.

Preuve. Par Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale avec la condition initiale $Z(t_0) = Z_0$ et on vérifie que si $M(t) := \exp((t - t_0)A)$ alors $M'(t) = AM(t)$ et $M(t_0) = Id$. Ainsi $Z(t) = \exp((t - t_0)A)Z_0$ est la solution cherchée.

- (3) Description des trajectoires.

Preuve. Pour décrire les trajectoire il faut exprimer $\exp(A)$ en tenant compte des propriétés de χ_A . En posant $V(t) := PZ(t)$, l'équation différentielle devient $V'(t) = \rho R(\theta)V(t)$ et la solution avec la condition initiale $V(t_0) := {}^t(v_1(t_0), v_2(t_0))$ est alors

$$V(t) = \exp((t - t_0)\rho R(\theta))V_0 = e^{(\rho \cos \theta)(t - t_0)} \begin{bmatrix} v_1(t_0) \cos [(\rho \sin \theta)(t - t_0)] \\ v_2(t_0) \sin [(\rho \sin \theta)(t - t_0)] \end{bmatrix}.$$

Les trajectoires sont soit le point $(0, 0)$, des ellipses centrées en $(0, 0)$ pour $\cos \theta = 0$ i.e. $a + d = 0$ ou des spirales centrées en $(0, 0)$ avec un sens de parcours fonction de $t - t_0$ et donnant un éloignement quand $(\cos \theta)(t - t_0) > 0$ et un rapprochement quand $(\cos \theta)(t - t_0) < 0$. Ainsi le centre de la spirale $(0, 0)$ est instable pour $\cos \theta > 0$ i.e. $a + d > 0$ et stable pour $a + d < 0$.

Exercice 3 Application de la décomposition polaire.

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Preuve. On rappelle que la décomposition polaire induit un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R}) \times \text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$, [Fr. B-C-D] p. 284 et [C. G.] tome 1 p. 208. ///

On conclut alors puisque $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

On peut aussi conclure en utilisant la décomposition de Cholesky qui induit un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (\mathbb{R}^{++})^n$ et on conclut avec l'exponentielle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{++} .

Pour une variante avec la décomposition LU , voir [F. M. 2] Théorème 4 p.42.

Exercice 4 Exponentielles des matrices antisymétriques réelles, [Fr. B-C-D] p. 123 et 286.

(1) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et B une base orthonormée. Soit u un endomorphisme de E . On suppose que u est antisymétrique i.e. $u^* = -u$.

(a) Caractériser la matrice de u dans la base orthonormée B .

Preuve. Dans une BON la matrice de l'adjoint d'un endomorphisme v est la transposée de la matrice de v dans cette base; ainsi la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de u dans la BON B vérifie ${}^tA = -A$.
///

(b) On suppose que $n = 2$ et que $\ker u = \{0\}$. Montrer que u est produit d'une homothétie de rapport $\rho > 0$ et d'une rotation de mesure d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$.

Preuve. Dans la base orthonormée B si la matrice de u est A alors la matrice de u^* est tA . Ainsi $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = |a| \begin{bmatrix} 0 & -\text{sign}(a) \\ \text{sign}(a) & 0 \end{bmatrix}$ d'où le résultat. ///

(c) On suppose $n > 0$. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u .

(i) Montrer que $u|_F$ est un endomorphisme antisymétrique.

Preuve. Puisque $u^* = -u$, il suit que $u^*(F) \subset F$; ainsi pour tout $x, y \in F$ on a $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ et donc $u|_F = -u|_F$ est l'adjoint de $u|_F$. ///

(ii) Montrer que $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et que $u|_{F^\perp}$ est un endomorphisme antisymétrique.

Preuve. Soit $x \in F^\perp$ si $y \in F$ on a $(u(x)|y) = (x|u^*(y)) = -(x|u(y)) = 0$ ainsi $u(F^\perp) \subset F^\perp$.
///

(d) Montrer que si F est une droite stable par u alors $u|_F = 0$.

Preuve. Si $F = \mathbb{R}x$ avec $\|x\| = 1$ alors $u(x) = -u(x)$ et donc $u|_F = 0$. ///

(e) On suppose que $\ker u = \{0\}$. Montrer que u admet un plan stable.

Preuve. Un lemme classique qui vaut pour tout les endomorphismes réels montre que u laisse stable un sous-espace de dimension 1 ou 2. Rappelons la preuve : On considère la décomposition en irréductibles du polynôme minimal $m_u(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Si il y a un facteur irréductible de degré 1 disons $X - \lambda$ alors λ est une valeur propre de u d'où l'existence d'une direction propre. Si ce n'est pas le cas on considère un facteur irréductible de degré 2 disons $P(X) = X^2 - aX - b$. Alors $Q := \frac{m_u}{P}$ n'est pas identiquement nul sur E . Soit $x \in E$ avec $y := Q(u)(x) \neq 0$, alors $F := \mathbb{R}y + \mathbb{R}u(y)$ est un sous-espace stable par u et non réduit à $\{0\}$ et de dimension ≤ 2 . Dans le cas où u est antisymétrique et $\ker u = \{0\}$, on a vu que u n'a pas de droite stable et ainsi u admet un plan stable. ///

(f) Montrer que $E = \bigoplus_{0 \leq i \leq s} E_i^\perp$ où $E_0 = \ker u$ et pour $1 \leq i \leq s$, E_i est un plan stable par u .

Preuve. Quitte à considérer la restriction de u à E_0^\perp on peut supposer que $E_0 = \{0\}$ (remarquer que $u|_{E_0^\perp}$ est antisymétrique par 1. c)). Soit alors F un plan stable par u alors $u|_F$ et $u|_{F^\perp}$ sont antisymétriques. Un raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace donne le résultat.
///

(g) Ecrire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique de u .

Preuve. Par f) et a) il suit que $\chi_u(X) = X^{n_0} \prod_{1 \leq i \leq s} (X^2 + \rho_i^2)$ où $n_0 = \dim E_0$ et $\rho_i > 0$ sont les rapports des similitudes directes $u|_{E_i}$. ///

(2) Soit $Asym_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

(a) Montrer que si $A \in Asym_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $O := \exp(A)$ l'application transposée étant continue sur $M_n(\mathbb{R})$ il suit que ${}^tO = \exp({}^tA) = \exp(-A)$ et donc $O^tO = \exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = Id$. Ainsi $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. D'autre part si $M \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\det \exp(M) = \exp(\text{Tr}M)$ (trigonaliser M dans $M_n(\mathbb{C})$). Puisque $\text{Tr}A = 0$ par 1.g) il suit que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$. ///

(b) Montrer que $\exp(\text{Asym}_n(\mathbb{R})) = \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit donc $O \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ avec PO^tP un tableau diagonal de matrices de rotations planes complété par l'identité. Puisque si $A \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$, $PA^tP \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$, il suit qu'il suffit de montrer le résultat en dimension $n = 2$. Soit $O := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Soit

$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, alors $J^2 = -Id$ et donc $\exp(\theta J) = \cos(\theta)Id + \sin(\theta)J = O$. ///

(c) Déterminer les $A \in \text{Asym}_n(\mathbb{R})$ avec $\exp(A) = Id$.

Preuve. Quitte à remplacer A par PA^tP où $P \in O_n(\mathbb{R})$ on peut supposer que A est un tableau diagonal de similitudes planes θJ avec $\theta \in \mathbb{R}$ suivi de la matrice nulle (c'est 1.f) et g)). Puisque $\exp(\theta J) = Id$ ssi $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ le résultat suit. ///

Exercice 5 La décomposition polaire de $O(n, \mathbb{C})$, [C. G.] tome 1 p. 216 exercice B2.