Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 59- Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Commentaires du jury 2015 : Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.
Commentaires du jury 2016 : Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Remarques. Penser à la dualité en algèbre (transposée, rang d'une matrice, formes bilinéaires symétriques non dégénérées, idéaux maximaux de l'algèbre des polynômes à n indéterminées et évaluations (on dépasse le cadre de la dimension finie) ...). A la dualité en géométrie (plan projectif, géométrie euclidienne et orthogonalité ...)

Plus précisément dans ce qui suit on développe les liens entre dualité et formes bilinéaires.
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

A. Dualité.

I. La dualité est définie par la forme bilinéaire canonique $\varphi : E \times E^\star \to K$ avec $\varphi(x,\ell) = \ell(x)$

D'où la correspondance bijective Φ qui à un sous-espace vectoriel F associe son orthogonal $\Phi(F) := F^\circ := \{\ell \in E^\star \mid \ell(F) = 0\}$

Φ est décroissante pour l'inclusion et compatible avec les supplémentaires : si $E = F \bigoplus S$ alors $E^\star = \Phi(F) \bigoplus \Phi(S)$.

Cela explique en particulier la symétrie dans la formule $q^{r(n-r)}$ qui donne le nombre de sous-espaces de E supplémentaires d'un sous-espace vectoriel de dimension r pour $K = \mathbb{F}_q$.

2. Dualité et endomorphismes

a.Transposée Soit $u \in End_K(E)$, on définit l'application transposée ${}^tu$ par $\varphi(u(x),\ell) = \varphi(x, {}^tu(\ell))$ pour tout $x \in E$ et $\ell \in E^\star$.

b. Sous-espace stable par un endomorphisme Soit $u \in End_K(E)$ et F un sous-espace avec $u(F) \subset F$ alors ${}^tu(F^\circ) \subset F^\circ$ et si $L \subset E^\star$ est un sous-espace stable par ${}^tu$ alors $u(G) \subset G$ avec $G := \cap_{\ell \in L} \operatorname{Ker} \ell$.

En général un sous-espace F stable par u n'admet pas de supplémentaire stable . Cependant on montre (lemme fondamental, [F. M. 2] lemme 2 p. 12) qu'il existe un sous-espace monogène $F = K[u](x)$ avec l'égalité des polynômes minimaux $m_u = m_{u|F}$, alors F admet un supplémentaire stable. Pour cela on construit un sous-espace de $E^\star$ stable par ${}^t u$ qui est l'orthogonal d'un supplémentaire de F, [F. M. 2] lemme 3 p. 14.

B. Dualité et formes bilinéaires symétriques.

Soit $f : E \times E \to K$, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée on peut alors réaliser la dualité dans E.

On note $F^\perp$ l'orthogonal pour f du sous-espace vectoriel F. Soit $\theta : E \to E^\star$ avec $\theta(x) = f(x,.)$ i.e. $\theta(x)(y) = f(x,y)$, alors l'application linéaire θ est bijective et si F est un sous-espace de E, θ induit une bijection de $F^\perp$ dans F°.

Pour illustrer cela citons la dualité dans $M_n(K)$ qui devient facile via la forme bilinéaire non dégénérée $\mathrm{Tr}(AB)$ ou plus classique la dualité dans dans les espaces euclidiens. Rappelons que la réduction des endomorphismes normaux u s'obtient en remarquant que l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est un supplémentaire stable par u.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)

[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf

[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)

[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf

[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)

[Fr. MMG] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996, 2010)

et

[A. F.] Arnaudies J.M., Fraysse H. *Cours de mathématiques 1 Algèbre* (Dunod 1987)

Développements conseillés :

(1) Dual de $M_n(k)$, [Fr. A] p. 90. Application : tout hyperplan vectoriel de $M_n(k)$ rencontre $GL_n(k)$; formes linéaires sur $M_n(k)$ invariantes par une conjugaison, [Fr. A] p.110 et ex. 2.3.9 p.126. Voir exercice ci-dessous.

On peut aussi voir une application aux espaces vectoriels de nilpotents, [Fr. A] ex. 3.7.15 p. 163. Voir exercice ci-dessous.

(2) Hyperplans

1. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $(f_i), i \in I$ une famille de formes linéaires sur E. Alors $\dim(\cap \operatorname{Ker} f_i, i \in I) = \dim E - dim < f_i >$

Application : Dans un espace affine euclidien, il existe un unique point à égale distance de l'ensemble des points formant un repère affine ; en d'autres termes il existe une unique sphère passant par les points d'un repère affine, [Fr. MMG] Hyperplans médiateurs p. 161, voir exercice ci-dessous.

2. Nombre d'hyperplans d'un espace affine euclidien situés à égale distance des points d'un repère, [F. M. 1] $n°145$ p. 435.

(3) Calcul des coordonnées barycentriques (ce sont des formes affines) avec les volumes, [F. M. 1] $n°121$ partie A p. 350 et application aux cercles tangents aux côtés d'un triangle et aux sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre, [F. M. 1] $n°121$ partie C.

(4) Le théorème de Hahn Banach, [F. M. 2] p. 278.

Exercice 1

Soit k un corps commutatif et $n \geq 2$. Si $M = (m_{i,j}) \in M_n(k)$, on note $\mathrm{Tr}(M) := \sum_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Si $A \in M_n(k)$ on note Φ_A l'application définie par $\Phi_A(M) := \mathrm{Tr}(AM)$ pour $M \in M_n(k)$.

(1) Montrer que $\Phi_A \in M_n(k)^\star$.

Preuve $M \to AM$ est linéaire ainsi que $M \to \mathrm{Tr}(M)$. ///

(2) Soit $E_{i,j} \in M_n(k)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. Calculer $\mathrm{Tr}\, AE_{i,j}$.

Preuve Puisque $E_{i,j}E_{i',j'} = \delta_{j,i'}E_{i,j'}$ *il suit que* $\mathrm{Tr}(E_{i,j}E_{i',j'}) = \delta_{j,i'}\delta_{i,j'}$. *On écrit* $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'}E_{i',j'}$ *on a donc* $\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. ///

(3) Montrer que $\Phi : M_n(k) \to M_n(k)^\star$ définie par $\Phi(A) = \Phi_A$ est linéaire bijective.

Preuve La linéarité vient de la linéarité de la trace. Soit $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'}E_{i',j'} \in \ker\Phi$ *alors* $0 = \Phi(A)(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ *par la question précédente. Ainsi* $A = 0$. *La surjection suit puisque* $\dim M_n(k) = \dim M_n(k)^\star$. ///

(4) Soit H un hyperplan de $M_n(k)$. Déduire de ce qui précède qu'il existe $A \in M_n(k)$ avec $H = \ker\Phi_A$.

Preuve Soit H *un hyperplan de* $M_n(k)$ *c'est le noyau de* $\varphi \in M_n(k)^\star - \{0\}$ *et par la question 3 il existe* $A \in M_n(k)$ *(en fait unique) telle que* $\varphi = \Phi_A$. ///

(5) Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ la base canonique de k^n et σ le cycle $(1, 2, ..., n)$. Soit $f_\sigma \in \mathrm{End}_k(E)$ avec $f_\sigma(e_i) = e_{i+1},\ 1 \le i < n$ et $f_\sigma(e_n) = e_1$. On note $Q(\sigma)$ la matrice de f_σ dans la base canonique. Calculer sa trace.

Preuve Puisque $n > 1$ *les coefficients diagonaux de* $Q(\sigma)$ *sont nuls. Ainsi* $\mathrm{Tr}\,Q(\sigma) = 0$.///

(6) Pour $1 \le r \le n$, on note I_r la matrice avec des 1 en position (i, i) pour $1 \le i \le r$ et des 0 ailleurs. Soit H_r l'hyperplan $\ker\Phi_{I_r}$. Montrer qu'il existe $M \in H_r$ avec M inversible.

Preuve Voici la preuve suggérée par la question précédente. Si $r = 1$ *on remarque que* $I_1Q(\sigma) = E_{1,n}$ *qui est de trace nulle. Puisque* $Q(\sigma)$ *est inversible* ($Q(\sigma)^n = Id$), *il suit que* $M = Q(\sigma)$ *convient. Si* $r > 1$ *la matrice de permutation* $Q(\tau)$ *correspondant au cycle* $\tau := (1, 2, .., r)$ *convient* ($Q(\tau)(e_i) = e_{i+1},\ 1 \le i < r,\ Q(\tau)(e_r) = e_1$ *et* $Q(\tau)(e_i) = e_i,\ r + 1 \le i \le n$).///

(7) Soit H un hyperplan de $M_n(k)$. Déduire des questions précédentes l'existence de $M \in H$ avec M inversible.

Preuve On a vu que $H = \ker\Phi_A$ *avec* $A \ne 0$, *ainsi si* r *est le rang de* A *on a* $r \ge 1$. *Il existe* $P, Q \in \mathrm{GL}_n(k)$ *avec* $A = PI_rQ^{-1}$ *(deux matrices qui ont le même rang sont équivalentes). Si* $M \in \mathrm{GL}_n(k)$ *vérifie* $\mathrm{Tr}\,I_rM = 0$, *alors* $\mathrm{Tr}\,PI_rQ^{-1}QMP^{-1} = \mathrm{Tr}\,I_rM = 0$ *(utiliser l'égalité* $\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,BA$*). Ainsi* QMP^{-1} *convient.* ///

Exercice 2 Soit K un corps commutatif et $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes. Soit $E_{i,j} \in M_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. Si $M = (m_{i,j}) \in M_n(K)$, on note $\mathrm{Tr}(M) := \sum_{1\le i\le n} m_{i,i}$. Si $A \in M_n(K)$ on note Φ_A l'application définie par $\Phi_A(M) := \mathrm{Tr}(AM)$ pour $M \in M_n(K)$.

(1) Montrer que $\Phi : M_n(K) \to M_n(K)^\star$ définie par $\Phi(A) = \Phi_A$ est linéaire bijective.

Preuve. La linéarité vient de la linéarité de la trace. Soit $A = \sum_{i',j'} a_{i',j'}E_{i',j'} \in \ker\Phi$ *alors* $0 = \Phi(A)(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = \sum_{i',j'} \mathrm{Tr}(a_{i',j'}E_{i',j'}E_{i,j}) = \sum_{i',j'} \delta_{i',j}\delta_{j',i}a_{i',j'} = a_{j,i}$. *Ainsi* $A = 0$. *La surjection suit puisque* $\dim M_n(k) = \dim M_n(k)^\star$. ///

(2) Si $M \in M_n(K)$, on note $\hat{M}$ le K-endomorphisme de $E := K^n$ dont la matrice dans la base canonique (e_i) de K^n est égale à M (i.e. si $M = (m_{i,j})$ alors $\hat{M}(e_j) = \sum_i m_{i,j}e_i$). Soit $N_n(K)$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(K)$. Soit $\mathcal{N}_n \subset M_n(K)$ le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ engendré par $N_n(K)$ et $\mathcal{N}_n^\perp$ son orthogonal dans $M_n(K)^\star$. On veut caractériser $\mathcal{N}_n$.

Montrer que pour $N \in M_n(K)$ nilpotente alors $\mathrm{Tr}\,N = 0$ et $N^n = 0$.

Preuve. La matrice $N \in M_n(K)$ *est nilpotente si et seulement si il existe* $t > 0$ *avec* $N^t = 0$ *et donc par Cayley-Hamilton fort ssi son polynôme caractéristique* $\chi_N(X) = X^n$. *Puisque* $-\mathrm{Tr}\,N$ *est égal au coefficient de* X^{n-1} *et que* $(-1)^n \det N$ *est le terme constant dans* $\chi_N(X)$, *le résultat suit.* ///

(a) Désormais $n > 1$, montrer alors que $\mathcal{N}_n \ne N_n(K)$?

Preuve. Si $n = 1$, *on a l'égalité. Dès que* $n > 1$ *on peut considérer* $A := E_{2,1} + E_{1,2}$, *alors* $A^{2m} = E_{1,1} + E_{2,2}$ *dès que* $m > 0$. *Ainsi* $A \in \mathcal{N}_n - N_n(K)$. ///

(b) Montrer que $\mathcal{N}_n^\perp \neq \{0\}$.

Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, il suit que l'égalité n'est possible que si $\mathcal{N}_n = M_n(K)$. Or par linéarité de la trace $\operatorname{Tr}(\mathcal{N}_n) = 0$, ainsi $E_{1,1} \notin \mathcal{N}_n$. //

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{N}_n^\perp - \{0\}$. On note $P = (p_{i,j}) \in M_n(K) - \{0\}$ l'unique matrice telle que $\varphi(M) = \operatorname{Tr} PM$ pour tout $M \in M_n(K)$. Montrer que $p_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

Preuve. Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}^2 = 0$, ainsi $0 = \varphi(E_{i,j}) = \operatorname{Tr} PE_{i,j} = p_{j,i}$. ///

(d) Soit $J := E_{i,i} - E_{i+1,i} + E_{i,i+1} - E_{i+1,i+1}$. Calculer J^2 et en déduire que $P = \lambda Id \neq 0$.

Preuve. Il suffit décrire la matrice J et vérifier que $J^2 = 0$. Alors $0 = \varphi(J) = p_{i,i} - p_{i+1,i+1}$, ainsi $P = p_{1,1} Id$ avec $p_{1,1} \neq 0$ par la question a). ///

(e) Caractériser $\mathcal{N}_n$.

Preuve. Puisque pour un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E de dimension finie on a l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$, il suit que $\mathcal{N}_n = \{A \in M_n(K) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$. ///

(3) Montrer que le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$ est $M_n(K)$.

Preuve. Soit V le sous-espace de $M_n(K)$ engendré par $GL_n(K)$, alors pour $i \neq j$, $B_{i,j}(1) := +E_{i,j} \in GL_n(K)$ et donc V contient les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$. Pour montrer que $E_{i,i} \in V$ on considère σ un cycle de longueur $n-1$ avec $\sigma(i) = i$. Alors $Q(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $E_{i,i} - Q(\sigma) \in V$ puisque la diagonale est nulle. ///

Exercice 3 Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\varphi_i \in E^\star$.

(1) Montrer que $\dim_K(\cap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker} \varphi_i) = \dim_K E - \dim_K(\sum_{1\leq i\leq n} K\varphi_i)$.

Preuve. Si $F := \sum_{1\leq i\leq n} K\varphi_i)$ alors $F^\perp = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0,\ \forall \varphi \in F\}$ et donc $F^\perp \subset \cap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker} \varphi_i$. L'autre inclusion est immédiate puisque $\varphi \in F$ est combinaison linéaire des φ, $1 \leq i \leq n$. Puisque $\dim F^\perp + \dim F = n$ le résultat suit. ///

(2) Désormais $(E, \|.\|)$ est le $\mathbb{R}$-espace affine euclidien R^n. Soit A_i, $0 \leq i \leq n$ un repère affine. Pour $1 \leq i \leq n$, on note $H_i := \{M \in E \mid \|\vec{MA_0}\| = \|\vec{MA_i}\|\}$ et $I_i := \frac{A_0 + A_i}{2}$, le milieu des points A_0, A_i.

(a) Soit $\varphi_i \in E^\star$, définie par $\varphi_i(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{A_0A_i}$. Montrer que $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $E^\star$.

Preuve. Il suffit de montrer que $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre. Soit donc $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i\varphi_i = 0$, alors $\forall \vec{x} \in E$ on a $(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \vec{A_0A_i}).\vec{x} = 0$, ainsi $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \vec{A_0A_i} = \vec{0}$ et puisque $(\vec{A_0A_i})_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, il suit que $\lambda_i = 0$. ///

(b) Montrer que $H_i = I_i + \operatorname{Ker} \varphi_i$ est un hyperplan affine de direction $\vec{A_0A_i}^\perp$.

Preuve. On a les équivalences $\|\vec{MA_0}\| = \|\vec{MA_i}\|$ ssi $\vec{MA_0}^2 = \vec{MA_i}^2$ et donc ssi $(\vec{MA_0} + \vec{MA_1}).(\vec{MA_0} - \vec{MA_1}) = 0$. Ce qui s'écrit $2\vec{MI_i}.\vec{A_0A_i} = 0$ i.e. $\vec{MI_i} \in \operatorname{Ker} \varphi_i$. Puisque φ_i est une forme linéaire non nulle, il suit que H_i est l'hyperplan affine de direction $\operatorname{Ker} \varphi_i = \vec{A_0A_i}^\perp$ et contenant I_i. ///

(c) Montrer que $\cap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{0\}$.

Preuve. En effet $E^\star = \sum_{1\leq i\leq n} K\varphi_i$ par 2.a) et on conclut avec (1). ///

(d) Soit I avec $\vec{A_0I} := \sum_{1\leq i\leq n} \varphi_i(\vec{A_0I_i})e_i$ où $(e_i)_i$ est la base antéduale de la base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ de $E^\star$. Montrer que $I = \cap_{1\leq i\leq n} H_i$.

Preuve. Par définition de e_i on a $\varphi_i(\vec{A_0I}) = \varphi_i(\vec{A_0I_i})$, ainsi $\vec{I_iI} \in \operatorname{Ker} \varphi_i$ et donc $I \in H_i$ avec 2.b). Ainsi $I \in \cap_{1\leq i\leq n} H_i$. Si $J \in \cap_{1\leq i\leq n} H_i$, alors $\vec{IJ} \in \cap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker} \varphi_i$ et donc $I = J$ avec 2.c). ///

Exercice 4 Bases antéduale, [F. M. 1] $n°6$ p. 11.

Soient X un ensemble et k un corps. On considère le k-espace vectoriel $M(X,k)$ des applications de X dans k. On fixe une famille libre $\{f_1,...,f_n\}$ dans $M(X,k)$. On veut montrer qu'il existe des points $x_1,\cdots,x_n \in X$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(k)$ soit inversible.

(1) On note F le sous-espace vectoriel de $M(X,k)$ engendré par $f_1,\cdots,f_n$. Considérons l'application $\varphi : X \to F^*$ qui envoie $x \in X$ sur la forme linéaire $eval_x = \varphi(x) : F \to k,\ f \mapsto f(x)$. Soit $E \subseteq F^*$ le sous-espace vectoriel engendré par $\varphi(X)$. Déterminer l'orthogonal $E^\perp \subseteq F$ de E et en déduire que $E = F^*$.

Preuve $E^\perp = \{f \in F \mid \varphi(f) = 0\ \forall \varphi \in E\}$. *Puisque la famille* $(eval_x)_{x\in X}$ *engendre* E *il suit que* $E^\perp = \{f \in F \mid eval_x(f) = 0\ \forall x \in X\} = \{0\}$. *Ainsi* $\dim E = \dim F^\star - \dim E^\perp = \dim F^\star$ *et donc* $E = F^*$. *///*

(2) Montrer qu'il existe $x_1,...,x_n$ tels que $\{\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)\}$ soit une base de F^*.

Preuve Puisque $\dim F\star$ *est fini et puisque la famille* $(eval_x)_{x\in X}$ *est une famille génératrice de* $E = F\star$ *on peut en extraire une base* $(eval_{x_i})_{1\leq i\leq n}$. *///*

(3) On va montrer que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible (c'est-à-dire que ses vecteurs colonnes forment une famille libre). Supposons le contraire.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in k$, non tous nuls, tels que pour tout $i \leq n$, on ait

$$\sum_{1\leq j\leq n} \lambda_j f_i(x_j) = 0.$$

Preuve C'est la définition d'une liaison. ///

(b) En déduire que $\sum_j \lambda_j eval_{x_j} = 0$. Conclure.

Preuve Soit $\varphi := \sum_j \lambda_j eval_{x_j} \in E = F^\star$ *alors* $\varphi(f_i) = \sum_{1\leq j\leq n} \lambda_j f_i(x_j) = 0$. *Ainsi* φ *est nulle sur la base* $(f_i)_i$ *de* F, *elle est donc identiquement nulle. Ainsi les* (λ_j) *donnent une liaison des formes linéaires* $(eval_{x_j})_j$ *ce qui contredit la question précédente. ///*

Preuve Remarque. Soit $(g_1,g_2,...,g_n)$ *la base anté duale de* $(eval_{x_i}, 1 \leq i \leq n)$. *Alors* $eval_{x_i}(g_j) = \delta_{i,j}$ *i.e.* $g_j(x_i) = \delta_{i,j}$. *On peut écrire* $g_j = \sum_{1\leq i\leq n} a_{j,i} f_i$, *alors* $\delta_{i,j} = g_j(x_i) = \sum_{1\leq k\leq n} a_{j,k} f_k(x_i)$. *Autrement dit la matrice* $A := (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *est l'inverse de la matrice* $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$. *///*

Remarque. On peut signaler l'utilisation des bases antéduales dans la construction de bases orthogonales pour une forme quadratique à partir de l'algorithme de Gauss sur la décomposition d'une forme quadratique en combinaisons linéaires de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Exercice 5 L'espace vectoriel $H_{d,n}$ des polynômes homogènes de degré d à n indéterminées et puissances d-ièmes des polynômes homogènes de degré 1, [Fr. A] ex. 1.4.14 p. 82.

Soit K un corps commutatif. Soit $H_{d,n}$ le sous-K-espace vectoriel de $K[X_1,X_2,...,X_n]$ des polynômes homogènes de degré d auxquels on adjoint $\{0\}$. Soit $A_d := \{\alpha := (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + ... + \alpha_n = d\}$. Si $P \in H_{d,n}$. on pose $\Delta_\alpha(P) = \frac{\partial^d}{\partial^{\alpha_1}X_1...\partial^{\alpha_n}X_n}(P) \in K$.

(1) Dans cette partie K est un corps commutatif de caractéristique nulle.

(a) Montrer que $(\frac{1}{\alpha_1!...\alpha_n!}\Delta_\alpha)_{\alpha\in A_d}$ est la base duale de la base $(X^\alpha)_{\alpha\in A_d}$ de $H_{d,n}$.

Preuve. Soit $\alpha := (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *et* $\beta := (\beta_1,...,\beta_n) \in \mathbb{N}^n$ *avec* $\alpha_1 + ... + \alpha_n = \beta_1 + ... + \beta_n = d$. *Si* $\alpha = \beta$ *on a* $\Delta_\alpha(X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n}) = \alpha_n!\frac{\partial^{d-\alpha_n}}{\partial^{\alpha_1}X_1...\partial^{\alpha_{n-1}}X_{n-1}}(X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}...X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) = ... = \alpha_n!\alpha_{n-1}!...\alpha_1!$. *Si* $\alpha \neq \beta$, *puisque* $\alpha_1 + ... + \alpha_n = \beta_1 + ... + \beta_n = d$, *il existe* i_0 *avec* $\alpha_{i_0} > \beta_{i_0}$, *alors* $\frac{\partial^{\alpha_{i_0}}}{\partial^{\alpha_{i_0}}X_{i_0}}(X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}...X_n^{\beta_n}) = 0$ *et donc* $\Delta_\alpha(X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}...X_n^{\beta_n}) = 0$. *///*

(b) Soit $Q := a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$, montrer que $\Delta_\alpha(Q^d) = d!a_1^{\alpha_1}...a_n^{\alpha_n}$.

Preuve. Puisque $\frac{\partial}{\partial X_1}(Q^d) = da_1 Q^{d-1}$*, il suit que* $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial X_1^{\alpha_1}}(Q^d) = d(d-1)...(d-\alpha_1+1)a_1^{\alpha_1}Q^{d-\alpha_1}$ *d'où le résultat en dérivant par rapport aux autres variables.*

Remarque. On retrouve ainsi la formule du multinôme $(\sum_{1\leq i\leq n} X_i)^d = \sum_{\alpha\in A_d} \frac{d!}{\alpha_1!...\alpha_n!} X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}...X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{Z}[X_1,...,X_n]$*. ///*

(c) Soit $f := \sum_{\alpha\in} \lambda_\alpha \Delta_\alpha \in H_{d,n}^\star$ avec $\lambda_\alpha \in K$. Calculer $f((a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n)^d)$.

Preuve. Par la question précédente on a $f(Q^d) = \sum_{\alpha\in A_d} \lambda_\alpha \Delta_\alpha(Q^d) = d!\sum_{\alpha\in A_d} \lambda_\alpha a_1^{\alpha_1}...a_n^{\alpha_n} = d!P(a_1,...,a_n)$ *où* $P = \sum_{\alpha\in A_d} \lambda_\alpha X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n} \in H_{d,n}$*. ///*

(d) Dans cette question la caractéristique de K est quelconque mais on suppose que le corps K est un corps infini ce qui est le cas lorsque la caractéristique est nulle. Montrer par récurrence sur n que l'application K-linéaire $eval : K[X_1, X_2, ..., X_n] \to K^{K^n}$ définie par $eval(P)(a_1, ..., a_n) = P(a_1, ..., a_n)$ est injective.

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur le nombre d'indéterminées. Si $n = 1$*, un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de zéros. Supposons le résultat acquis pour* $K[X_1, ..., X_{n-1}]$*. Soit* $P \in K[X_1,...,X_n] = K[X_1,...,X_{n-1}][X_n]$*, ainsi* $P = p_0(X_1,...,X_{n-1}) + p_0(X_1,...,X_{n-1})X_n + ... + p_k(X_1,...,X_{n-1})X_n^k + ... + p_d(X_1,...,X_{n-1})X_n^d$*. Soit* $(x_1,..,x_{n-1}) \in k^{n-1}$*, alors* $P(x_1,..,x_{n-1},X_n) = p_0(x_1,...,x_{n-1}) + p_0(x_1,...,x_{n-1})X_n + ... + p_k(x_1,...,x_{n-1})X_n^k + ... + p_d(x_1,...,x_{n-1})X_n^d \in K[X_n]$ *a en particulier une infinité de zéros (* K *est infini) et donc* $p_k(x_1,...,x_{n-1}) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *et* $(x_1,...,x_{n-1}) \in K^{n-1}$*. Ensuite l'hypothèse de récurrence montre que* $p_k = 0$ *et donc au final* $P = 0$*. ///*

(e) Déduire de la question précédente que si $f \in H_{d,n}^\star$ est nulle sur le sous-espace vectoriel V de $H_{d,n}$ engendré par les puissances d-ièmes des polynômes homogènes de degré 1 alors $f = 0$.

Preuve. Immédiat par ce qui précède.

(f) En déduire que $V = H_{d,n}$.

Preuve. En effet par ce qui précède, il suit que l'orthogonal V^0 *de* V *pour la dualité est* $\{0\}$*. ///*

(2) Dans cette partie K est un corps commutatif de caractéristique $p > 0$.

Montrer que $X_1X_2^{p-1}$ n'est pas combinaison linéaire de puissances p-ièmes de polynômes homogènes de degré 1.

Preuve. En effet $\frac{\partial}{\partial X_1}(X_1X_2^{p-1}) = X_2^{p-1}$*. Or si* $L \in H_{1,n}$ *alors* $\frac{\partial}{\partial X_1}(L^p) = 0$ *(la caractéristique de* K *vaut* p*). ///*

Questions annexes :

i. Faites le lien avec les formes quadratiques dans le cas des polynômes homogènes de degré 2

ii. Calcul de la dimension de $H_{d,n}$. Voir [F. M. 1] $n°1$ pour deux calculs (la preuve avec les séries formelles permet de retrouver facilement la formule). Il y a enfin une preuve combinatoire qui est élémentaire : se donner un n-uplet $(i_1, i_2, ..., i_n)$ avec $i_1 + i_2 + ... + i_n = d$ revient à se donner dans l'intervalle $[1, n + d - 1]$, $n - 1$ entiers (des séparations) placés en $i_1 + 1$, $i_1 + i_2 + 2$,...,$i_1 + i_2 + ... + i_{n-1} + n - 1$. Le nombre de telles séparations est donc le nombre de façons de choisir $n - 1$ boules parmi $n + d - 1$. C'est donc $\binom{n+d-1}{n-1}$, [A. F.] p. 99 et 100.

Exercice 6 Combinaisons linéaires de carrés de formes linéaires, [F. M. 1] $n°46$ p. 106.

Exercice 7 Un développement original utilisable dans la leçon 42 Anneaux polynômes à plusieurs indeterminées : Nullstellensatz et systèmes linéaires, [F. M. 2] p. 271.

(1) *Rappels.*

Soit k un corps algébriquement clos, $A := k[X_1, ..., X_n]$ et $I \subset A$ un idéal.

(a) L'idéal I est de type fini i.e. il existe $P_1, ..., P_s \in A$ avec $I = \sum_{1\leq i\leq s} AP_i$ (propriété noethérienne des anneaux de polynômes).

(b) Soit $\underline{a} := (a_1, a_2, ..., a_n) \in k^n$ et $eval_{\underline{a}} : A \to k$ avec $eval_{\underline{a}}(P) = P(\underline{a})$. Alors $\ker eval_{\underline{a}} = \sum_{1 \leq i \leq n} A(X_i - a_i)$. Réciproquement les idéaux maximaux de A sont de cette forme (k est algébriquement clos).

(c) Soit $I = \sum_{1 \leq i \leq s} AP_i$ et $V(I) := \{\underline{a} := (a_1, a_2, ..., a_n) \in k^n \ |\forall i, eval_{\underline{a}}(P_i) = 0\}$. Le "théorème des zéros de Hilbert" dit que $P \in A$, $P(V(I)) = 0$ si et seulement si il existe $t > 0$ tel que $P^t \in I$.

(d) Avec les mêmes notations, $V(I) = \emptyset$ si et seulement si $I = A$ autrement dit si il existe $U_i \in A$ avec $\sum_{1 \leq i \leq s} U_i P_i = 1$ (cela provient de la caractérisation des idéaux maximaux).

(2) *Le problème*

On donne $A_{s,n} \in M_{s,n}(k)$ et $A_{s,n+1} = (a_{i,j}) \in M_{s,n+1}(k)$ qui est la concaténation de $A_{s,n}$ pour les n premières colonnes et du vecteur colonne ${}^t(a_{1,n+1}, ..., a_{s,n+1})$.

Pour $1 \leq i \leq s$, on définit $P_i := \sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j} X_j - a_{i,n+1}$. Soit $S(k) := \{\underline{x} := (x_1, x_2, ..., x_n) \in k^n, \ |\forall i, P_i(\underline{x}) = 0\}$. Il s'agit de montrer que $S(k) = \emptyset$ si et seulement si il existe $\mu_i \in k$ avec $\sum_{1 \leq i \leq s} \mu_i P_i = 1$.

(3) *Par l'algèbre linéaire*

(a) Montrer que $S(k) = \emptyset$ si et seulement si $(A_{s,n}) < (A_{s,n+1})$.

Preuve. $S(k) = \emptyset$ *ssi* ${}^t(a_{1,n+1}, ..., a_{s,n+1})$ *n'est pas dans l'image de* $A_{s,n}$ *ce qui compte tenu de l'inclusion* $\operatorname{Im} A_{s,n} \subset \operatorname{Im} A_{s,n+1}$ *équivaut à* $(A_{s,n}) < (A_{s,n+1})$*.///*

(b) On suppose que $S(k) = \emptyset$, montrer en utilisant le pivot de Gauss sur les lignes qu'il existe $\mu_i \in k$ avec $\sum_{1 \leq i \leq s} \mu_i L_i = 0$ et $\sum_{1 \leq i \leq s} \mu_i a_{i,n+1} \neq 0$, où L_i est la i-ième ligne de $A_{s,n}$ et conclure.

Preuve. Le pivot de Gauss sur les lignes de la matrice $A_{s,n+1}$ *aboutit à* s *lignes* $(L'_i, a'_{i,n+1})$ *où* $L'_i := \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_{j,i} L_j$ *et* $a'_{i,n+1}) := \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_{j,i} a_{j,n+1}$ *avec les* r *premières lignes* L'_i *linéairement indépendantes et les suivantes nulles, ainsi* $r = (A_{s,n})$ *et enfin* $a'_{r+1,n+1}) \neq 0$ *puisque* $(A_{s,n}) < (A_{s,n+1})$*. Ainsi* $\sum_{1 \leq j \leq s} \mu_{j,r+1} P_j = -\sum_{1 \leq j \leq s} \mu_{j,r+1} a_{j,n+1} = -a'_{r+1,n+1} \neq 0$*. On conclut donc en divisant cette égalité par* $a'_{r+1,n+1}$*.///*

(4) *Par le Nullstellensatz*

Preuve. Remarque. Notons que la partie d) du rappel fournit une CNS pour que $S(k) = \emptyset$ *: Il existe* $U_i \in A = k[X_1, ..., X_n]$ *avec* $\sum_{1 \leq i \leq s} U_i P_i = 1$*, mais il ne semble pas possible d'en déduire une relation avec des* $U_i \in k$*.///*

(a) Soit $f_1, ..., f_t \in A$ des polynômes homogènes de degré 1. Montrer que l'idéal $\sum_{1 \leq i \leq t} Af_i$ est un idéal premier de A.

Preuve. Quitte à réordonner on peut supposer que $f_1, ..., f_r$ *sont* k*-linéairement indépendants et qu'ils engendrent tous les* f_i *alors l'idéal* $I := \sum_{1 \leq i \leq r} f_i = \sum_{1 \leq i \leq t} f_i$*. On peut alors compléter la famille libre* $(Y_i := f_i, \ 1 \leq i \leq r)$ *par* $(Y_i, \ r+1 \leq i \leq n)$ *en une base du* k*-espace vectoriel* $H_{1,n} := \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$ *des polynômes homogènes de degré* 1*. Alors* $A = k[Y_1, ..., Y_n]$ *et donc* $\frac{A}{I} \simeq k[Y_{r+1}, ..., Y_n]$ *est intègre.///*

(b) Soit $\tilde{P}_i := \sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j} Y_j - a_{i,n+1} Y_{n+1} \in k[Y_1, ..., Y_{n+1}]$. Montrer que $S(k) = \emptyset$ si et seulement si $V(\tilde{P}_i) \subset V(Y_{n+1})$.

Preuve. On a $V(\tilde{P}_i) = \{(y_1, ..., y_{n+1})\}$ *avec* $y_{n+1} = 0$ *et* $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j} y_j = 0$ *union* $y_{n+1} \neq 0$ *et* $(\frac{y_1}{y_{n+1}}, ..., \frac{y_n}{y_{n+1}}) \in S(k)$*.///*

(c) En déduire que $S(k) = \emptyset$ si et seulement si il existe $m > 0$ avec $Y_{n+1}^m \in \sum_{1 \leq i \leq s} \tilde{P}_i k[Y_1, ..., Y_{n+1}]$.

Preuve. Cela suit immédiatement de la question précédente et du Nullstellensatz qui reste vrai si k *n'est pas algébriquement clos.*

(d) Déduire de a) que l'on peut supposer que $m = 1$

Preuve. Par a) il suit que l'idéal $\sum_{1 \leq i \leq s} \tilde{P}_i k[Y_1, ..., Y_{n+1}]$ *est premier , ainsi* $Y_{n+1} \in \sum_{1 \leq i \leq s} \tilde{P}_i k[Y_1, ..., Y_{n+}$

(e) Conclure.

Preuve. Ainsi $Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq s} U_i \tilde{P}_i$ *avec* $U_i \in k[Y_1, ..., Y_{n+1}]$. *Par l'unicité de la décomposition en composantes homogènes il suit que* $Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq s} \mu_i \tilde{P}_i$ *où* $\mu_i \in k$ *est la composante homogène de degré* 0 *de* U_i. *On conclut en spécialisant à* $Y_{n+1} = 1$.*///*