Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 81- Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Commentaires du jury 2015 : On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.
Commentaires du jury 2016 : Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Il est important de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de Farkas, le théorème de séparation de Hahn-Banach, ou les théorèmes de Helly et de Caratheodory.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. MMG] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996, 2010)
et
[Bo.] Boyer P. *Algèbre et Géométrie* (Calvage Mounet 2016)
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Développements conseillés :

(1) Calcul des coordonnées barycentriques avec les volumes (partie A de [F. M. 1] $n°121$ p. 350) et application aux cercles tangents aux côtés d'un triangle et aux sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre (même exercice partie C), les barycentres célèbres du triangle (même exercice partie B).

(2) Le théorème de Caratheodory et applications (savoir donner un exemple de partie fermée F de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ avec $conv(F)$ non fermée), [Fr. MMG] A.2.4.13. p. 22, et [F. M. 1] $n°120$ p. 348.

(3) Sur le groupe affine de l'enveloppe convexe d'une famille, [F. M. 1] $n°132$ p. 382.

Exercice 1 Le théorème de Gauss-Lucas, [Fr. MMG] p. 20.

Soit $P := \prod_{1\leq i\leq s}(Z - z_i)^{\mu_i} \in \mathbb{C}[Z]$ avec $z_i \neq z_j$ et $\mu_i > 0$.

(1) Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe $Conv(P)$ des $z_i, 1 \leq i \leq s$.

(2) On suppose que les racines de P sont dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il en est de même pour les racines de P'.

(3) On suppose que les affixes des zéros P dans $\mathbb{C}$ ne sont pas alignés (on identifie $\mathbb{C}$ au plan affine réel). Montrer que si $P'(z) = 0$ alors $P(z) = 0$ (et donc z est racine multiple de P) ou bien z est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des zéros de P.

Preuve. Notons z une racine de P'. On suppose que z est au bord $Conv(P) - Conv(P)^\circ$ de l'enveloppe convexe des zéros de P (notez que $Conv(P)$ est un fermé de $\mathbb{C}$ d'intérieur $Conv(P)^\circ$ non vide). Si $P(z) \neq 0$ alors il existe $z_1 \neq z_2$ des racines de P telles que z_1, z_2, z soient alignés (faire un dessin). Soit $D := z_1 + \mathbb{R}(z_2 - z_1)$ et projetons orthogonalement sur $D^\perp$ la relation barycentrique $\sum_{1\leq i\leq s} \frac{1}{|z-z_i|^2}(z - z_i) = 0$. Puisque $Conv(P)$ est dans le même demi-espace fermé défini par la droite D on obtient une contradiction. ///

(4) Dans le cas où P est de degré 3 on a une caractérisation géométrique des racines de P', [F. M. 1] $n°126$.

Exercice 2 Fonction d'Apollonius ou de Leibniz, [F. M. 1] $n°122$.

Soient E un espace affine euclidien, $m_1, m_2, ...m_n \in E$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ avec $\lambda = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \neq 0$. On pose $g := \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} m_i$. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ avec $F(m) = \sum_i \lambda_i \|m - m_i\|^2$.

(1) (a) Montrer que $F(m) = \lambda\|m - g\|^2 + F(g)$

(b) Exprimer $F(m_i)$ avec la question précédente et en déduire que
$F(m) = \lambda\|m - g\|^2 + \frac{1}{\lambda}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_i\lambda_j\|m_i - m_j\|^2$.

(2) Soient (x, y, z) des points non alignés de E et T le triangle de sommets x, y, z. On note $a := \|x - y\|$, $b := \|x - z\|$, $c := \|z - y\|$ et $i := \frac{a}{a+b+c}x + \frac{b}{a+b+c}y + \frac{c}{a+b+c}z$.

(a) Justifier que i est équidistant des côtés du triangle T. On note r cette distance.

(b) Montrer qu'il existe un seul point O qui est équidistant des sommets du triangle T. On note R cette distance.

(c) Déduire de la partie 1 que $\|O - i\|^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$.

(d) Montrer que $\frac{abc}{a+b+c} = 2rR$ (exprimer de 2 façons l'aire du triangle T).

Exercice 3 Une partie fermée convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent, [F. M. 2] p. 279.

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ avec C non vide, fermé et convexe. On suppose que $a \notin C$ et on note $d := d(a, C)$ la distance euclidienne de a à C.

i) Montrer que $d > 0$

ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $x, y \in C$ avec $d(x, a) \leq d + \frac{1}{k}$, $d(y, a) \leq d + \frac{1}{k}$. Montrer que $d(x, y)^2 \leq \frac{4}{k^2} + 8\frac{d}{k}$ (remarquer que $d(a, \frac{x+y}{2}) \geq d$ et considérer l'identité $(x - a + y - a)^2 + ((x - a) - (y - a))^2 = 2((x - a)^2 + (y - a)^2)$).

iii) En déduire qu'il existe $z \in C$ unique tel que $d(z, a) = d$.

iv) En déduire que C est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Exercice 4 Dualité des ensembles compacts convexes de $\mathbb{R}^n$, [C. G.] p. 370.

Exercice 5 Le théorème de Hahn Banach et applications, [F. M. 2] p. 281.

Exercice 6 Une application de la décomposition de Cartan ou de la décomposition polaire : Points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$, [F. M. 2] p. 118 et [Bo.] p. 93. On pourra voir aussi l'application aux matrices bi stochastiques, [Bo.] p. 94.

Soit $B := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|U\|_2 \leq 1$, alors B est l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité B.

Preuve. Soit $U \in B$. On peut écrire $U = O_1DO_2$ avec $O_i \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale avec $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$. Alors $\|D\|_2 = \|U\|_2$ et $\|D\|_2 = max_i d_i = d_n$. Si $D = \sum_j \lambda_j O_j$ avec $O_j \in O_n(\mathbb{R})$ et $\sum_j \lambda_j = 1$ et $0 \leq \lambda_j \leq 1$, on a $U = \sum_j \lambda_j O_1 O_j O_2$; ainsi il suffit de montrer que D est dans l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$. Pour cela on écrit $d_1 = \alpha_1(-1) + (1 - \alpha_1)(1)$ alors $D = \alpha_1 D_{-1} + (1 - \alpha_1)D_1$ où D_{-1} resp. D_1 est la matrice diagonale D dans la quelle on a substitué -1 (resp. 1) à d_1. En itérant le procédé on montre avec l'associativité du barycentre que D est dans l'enveloppe convexe des matrices diagonales avec des $-1, 1$ sur la diagonale.

Montrons maintenant que $O \in O_n(\mathbb{R})$ est un point extrémal de B. Si $O = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2$ avec $U_i \in B$, quitte à multiplier par O^{-1} on peut supposer que $O = Id$. Alors si $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$ on a $x = \frac{1}{2}U_1(x) + \frac{1}{2}U_2(x)$ et $1 = \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\|U_1(x)\|_2 + \frac{1}{2}\|U_2(x)\|_2 \leq 1$, ainsi on a un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ce qui *donne* $U_i(x)$ *colinéaires à* x *et de même sens et l'inégalité précédente implique alors que* $U_i(x) = x$*, ainsi* $U_i = Id$*.*

Maintenant si $U \in B - O_n(\mathbb{R})$ *alors toujours avec Cartan on peut supposer* $U = D$ *est diagonale avec* $0 \leq d_i \leq 1$ *et* $d_{i_0} < 1$*. On peut écrire* $d_{i_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2d_{i_0} - 1)$ *. Alors* $2D = D_1 + D_2$ *avec* D_i *des matrices diagonales qui coïncident avec* D *en dehors de la ligne* i_0 *et valent respectivement* 1 *et* $2d_{i_0} - 1$ *pour le terme diagonal à la ligne* i_0*. Par construction* $D_i \in B$ *et* $D_1 \neq D$*.*

On retrouve là un cas particulier du théorème de Krein-Milman à savoir que tout convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. ///

Exercice 7 Le théorème de Helly, [Fr. MMG] exercice 2.4.13 p. 20 et [Bo.] p. 85.