Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 82- Applications des nombres complexes à la géométrie.

Commentaires du jury 2016 : Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. Il est nécessaire de présenter les similitudes, les homographies et le birapport. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbb{C})$. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de Riemann. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon.
Commentaires du jury 2017 : Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe de Terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbb{C})$. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de Riemann. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon. Il est possible de présenter les similitudes, les homographies et le birapport.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
[Fr. MMG] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996, 2010)
et
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)

Références.
Interprétation de transformations du plan euclidien par les complexes, [Fr. MMG] p. 231 Ex 2.8. 19 questions 1 à 6 et 7-8 pour des applications géométriques de la cocyclicité (caractérisation de la cocyclicité par le birapport est réel). Enfin Ex 3.6.23 p. 278 pour inversion et nombres complexes. Pour la formule de Ptolémée voir p. 234 et 275.
Rotations planes, nombres complexes de module 1, mesure des angles et exponentielle complexe, [Fr. B-C-D] prop. 4.1.1 p. 76, prop. 4.1.4 p. 78 et def. 4.1.6 p. 80.
Enfin tout cela se retrouve dans l'étude du groupe circulaire du plan, [Fr. MMG] p. 254.

Développements conseillés :

(1) L'ellipse de Steiner et théorème de Lucas, [F. M. 1] $n°126$ p. 367 . Remarquons qu'il n'est pas évident qu'il n'y a qu'une ellipse tangente au milieu des côtés d'un triangle. Ce n'est qu'une fois montré ou admis cela (la preuve la plus simple est la prop. 2 p. 363 de [F. M. 1]) que l'on peut affirmer que dans un triangle équilatéral l'ellipse de Steiner est le cercle inscrit au triangle.

(2) L'isomorphisme exceptionnel PSU_2 et $SO_3(\mathbb{R})$, [F. M. 2] p. 101, voir aussi [C. G.] Tome 1 p. 232. Pour une autre preuve via la projection stéréographique, [F. M. 1] $n°141$ p. 415 . Notez que le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple, [C. G.] Tome 1 p. 239 et [Fr. B-C-D] p. 98.

(3) Polygones réguliers constructibles à la règle et au compas (théorème de Gauss), [F. M. 1] $n°104$ questions 1 et 2 Dans le plan il faut alors préciser le théorème de Wantzel, [F. M. 1] p. 286.

Exercice 0 Cocyclicité de 4 points et birapport, [Fr. MMG] p. 231 Ex 2.8. 19 question 6 et le théorème de Ptolémée, [Fr. MMG] p. 234 Ex 2.8. 20.

Exercice 1 Hyperbole équilatère et nombres complexes, [Fr. MMG] p. 235 ex 2.8.21.

Exercice 2 Trouver les nombres complexes $z \neq 0$ tels que z, z^2, z^3 soit un triangle rectangle.

Preuve. Puisqu'une similitude conserve les angles cela revient à voir quand $1, z, z^2$ *est un triangle rectangle. Une condition nécessaire et suffisante est que* $z^2 - 1 = ir(z-1)$ *(rectangle en 1 et* $r \in R^*$*) ou* $z^2 - z = ir(1-z)$ *ou* $z - z^2 = ir(1-z^2)$ *et que* $z(z^2-1) \neq 0$*. Ce qui se traduit par* $z = -1 + ir$ *ou* $z = ir$ *ou* $z = \frac{r}{1+r^2}(-r+i)$*... . ///*

Exercice 3 Soient $z_i, i = 1,2,3$ resp. $z_i', i = 1,2,3$ des nombres complexes affixes respectives des points $A_i, i = 1,2,3$ (resp. A_i') qui sont supposés non alignés.

(1) Montrer que les triangles $A_i, i = 1,2,3$ et $A_i', i = 1,2,3$ sont directement semblables ssi $z_1z_2' + z_2z_3' + z_3z_1' = z_1'z_2 + z_2'z_3 + z_3'z_1$.

Preuve. Les triangles $A_i, i = 1,2,3$ *et* $A_i', i = 1,2,3$ *sont directement semblables ssi il existe une similitude directe* $z \to az + b$ *avec* $a \in C - \{0\}, b \in C$ *telle que* $z_i' = az_i + b$ *pour* $i \in 1,2,3$*. Ainsi une condition nécessaire est que* $\det(C_1, C_2, C_3) = 0$ *où* C_i *est le vecteur colonne des* z_i'*,* C_2 *des* z_i *et* $C_3 =^t (1,1,1)$.

Réciproquement si $\det(C_1, C_2, C_3) = 0$*, puisque* C_2 *et* C_3 *ne sont pas colinéaires (remarquer que sinon* $z_1 = z_2$ *ce qui n'est pas permis puisque les points* $A_i, i = 1,2,3$ *sont supposés non alignés) le résultat suit (notez que* $a \neq 0$ *puisque les points* $A_i', i = 1,2,3$ *sont supposés non alignés).*

On développe $\det(C_1, C_2, C_3)$ *ce qui donne* $z_1z_2' + z_2z_3' + z_3z_1' = z_1'z_2 + z_2'z_3 + z_3'z_1$*. ///*

(2) En déduire que le triangle $A_i, i = 1,2,3$ est équilatéral si et seulement si $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

Preuve. Cela revient à dire que le triangle $A_i, i = 1,2,3$ *est directement semblable à* $1, j, j2$ *ou* $1, j^2, j$*. Et donc avec ce qui précède à* $0 = [(jz_1 + j^2z_2 + z_3) - (z_2 + jz_3 + j^2z_1)][(j^2z_1 + jz_2 + z_3) - (z_2 + j^2z_3 + jz_1) = (jz_1 + j^2z_2 + z_3)(j^2z_1 + jz_2 + z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$*. ///*

Exercice 4 Deux cercles qui ne se coupent pas sont inverses de cercles concentriques et application au porisme de Steiner, [F. M. 2] p. 286.