

## Sous-corps fermés d'un corps valué

MICHEL MATIGNON ET MARC REVERSAT\*

*U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Bordeaux I,  
351, cours de la Libération, F 33405, Talence Cedex, France*

*Communicated by Walter Feit*

Received December 14, 1982

Soient  $K$  un corps valué non archimédien complet,  $\hat{K}$  le complété de la clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . Si  $\bar{K}$  est séparable sur  $K$  (ce qui est le cas en caractéristique zéro) les sous-corps de  $\bar{K}$  contenant  $K$  sont classifiés par les sous-groupes fermés de  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ , le groupe de Galois de  $\bar{K}$  sur  $K$ . On peut montrer que  $G$  classifie aussi les sous-corps fermés de  $\hat{K}$  contenant  $K$  [4, 6]. En effet, le point de départ est un résultat de Tate-Sen-Ax qui décrit l'action de  $G$  sur  $\hat{K}$  et qui s'énonce ainsi:

**THÉORÈME** [1, 13, 15]. *Soient  $K$  un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne et  $\hat{K}$  un complété d'une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . Alors, le sous-corps de  $\hat{K}$  des éléments invariants par le groupe  $\text{Aut}(\bar{K}/K)$  des  $K$ -automorphismes de  $\bar{K}$  (qui opère par continuité sur  $\hat{K}$ ) est l'adhérence de la clôture radicielle de  $K$ .*

Il suit alors dans le cas où  $\bar{K}$  est séparable sur  $K$  que l'application  $F \mapsto F \cap \bar{K}$  définit une bijection de l'ensemble des sous-corps fermés de  $\hat{K}$  contenant  $K$  sur les sous-corps de  $\bar{K}$  contenant  $K$  (dont l'application réciproque est  $L \mapsto \hat{L}$  où  $\hat{L}$  est l'adhérence de  $L$  dans  $\hat{K}$ ).

En revanche si  $\bar{K}$  n'est plus séparable sur  $K$ , la théorie de Galois n'a plus d'utilité puisque les automorphismes laissent stable la partie radicielle. Néanmoins lorsque  $K$  est un corps local, c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait, on peut décrire les sous-corps fermés de  $\hat{K}$ . L'application  $L \rightarrow \hat{L}$  est une application surjective de l'ensemble des sous-corps de  $\bar{K}$  contenant  $K$  sur l'ensemble des sous-corps fermés de  $\hat{K}$  contenant  $K$  [6]. Cette application n'est pas injective, plus précisément on a pour  $K \subset L \subset \bar{K}$

$$\hat{L} \cap \bar{K} = \begin{cases} L & \text{si } \mathcal{D}_{L/K} \neq (0) \\ LK^{p^{-\infty}} & \text{si } \mathcal{D}_{L/K} = (0) \end{cases}$$

\* Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

où  $p$  est la caractéristique de  $K$ ,  $L^s$  l'extension séparable maximale de  $K$  contenue dans  $L$ ,  $L^{p-\infty}$  la clôture radicielle de  $K$  dans  $\bar{K}$  et  $\mathcal{D}_{M/K}$  signifie différentielle de  $M$  sur  $K$ .

Notre étude se place dans le cadre suivant:  $K$  est un corps valué (non archimédien) complet,  $\hat{K}(X)$  est une extension transcendante valuée d'un complété d'une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . D'abord nous montrons qu'un corps fermé  $F$  intermédiaire entre  $K$  et  $\hat{K}(X)$  (complété de  $K(X)$ ) est soit contenu dans  $\bar{K}$  ou tel que  $\hat{K}(X)$  soit une extension algébrique finie de  $F$  (proposition 1). Si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, nous montrons que les corps algébriquement clos intermédiaires entre  $K$  et  $\hat{K}(X)$  sont  $\bar{K}$  et  $\bar{K}(X)$ . Ainsi les résultats obtenus sont ceux que l'on peut raisonnablement espérer. En revanche lorsque la caractéristique résiduelle est  $p > 0$  la situation est assez surprenante: en effet, il existe une infinité de corps fermés algébriquement clos intermédiaires entre  $K$  et  $\bar{K}(X)$ . Donnons une conséquence dans un cas simple: soit  $\mathbb{F}_p((T))$  le corps local de caractéristique  $p > 0$  admettant pour corps résiduel le corps  $\mathbb{F}_p$  à  $p$  éléments; alors  $\widehat{\mathbb{F}_p((T))}$ , le complété de la clôture algébrique du corps local  $\mathbb{F}_p((T))$ , contient une infinité de sous-corps fermés algébriquement clos.

Ces résultats sont aussi en relation avec une étude que nous avons faite sur le groupe des  $K$ -automorphismes continus de  $\bar{K}(X)$  [7, 8]. Soit  $\Delta_X$  l'ensemble des  $Y$  de  $\bar{K}(X)$  tels que  $Y \notin \bar{K}$ ,  $|Y - X| \leq \inf_{x \in \bar{K}} |X - x|$  et  $|Y| = |X|$ . Soit  $Y \in \Delta_X$ . Alors, l'application de  $\hat{K}(X)$  dans  $\hat{K}(Y)$  qui a une fraction rationnelle  $f(X)$  associe  $f(Y)$  est un  $\hat{K}$ -isomorphisme isométrique qui se prolonge donc en un  $\hat{K}$ -isomorphisme isométrique entre  $\bar{K}(X)$  et  $\bar{K}(Y)$ , c'est-à-dire en un  $\hat{K}$ -endomorphisme continu de  $\bar{K}(X)$  (tous les  $\hat{K}$ -endomorphismes continus de  $\bar{K}(X)$  sont en fait de cette forme). Les résultats précédents montrent que si la caractéristique résiduelle  $p$  de  $K$  est non nulle cet endomorphisme n'est pas nécessairement surjectif alors qu'il l'est toujours si  $p = 0$ . Autrement dit, l'orbite de  $X$  par le groupe  $\text{Aut}_{\text{cont}}(\bar{K}(X)/\hat{K})$  des  $\hat{K}$ -automorphismes continus de  $\bar{K}(X)$  est  $\Delta_X$  si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, sinon cette orbite est dense dans  $\Delta_X$  et distincte de  $\Delta_X$  (proposition 3).

## 0. CLASSIFICATION DES EXTENSIONS TRANSCENDANTES VALUÉES DE DEGRÉ 1

### 0.1. Notations

Si  $E$  est un corps, on désigne par  $\bar{E}$  une clôture algébrique de  $E$ ; si  $E$  est valué par une valeur absolue non archimédienne  $|\cdot|$ , on note  $|E^\times|$  le groupe des valeurs du groupe multiplicatif  $E^\times$ ,  $E^0$  l'anneau de valuation de  $E$ ,  $E^{00}$

l'idéal de valuation de  $E$ ,  $\hat{E}$  (ou  $E^\wedge$ ) un complété de  $E$ ; enfin on appelle caractéristique résiduelle de  $E$  la caractéristique du corps résiduel  $E^0/E^{00}$

Toutes les valeurs absolues considérées sont non-archimédiennes.

0.2. Classification des extensions valuées transcendantes de degré 1

[12, chap. 2; 2, Sect. 10 et Sect. 10, ex. 2]

Soient  $K$  un corps valué complet algébriquement clos,  $K(X)$  une extension transcendante de  $K$ . Il existe exactement trois types d'extensions de la valeur absolue de  $K$  à  $K(X)$ . Soit  $r_X = \inf_{x \in K} |X - x|$ .

*1<sup>er</sup> type.* Il existe  $x_0, \pi \in K$  tels que  $|X - x_0| = r_X = |\pi|$ . Alors  $K$  et  $K(X)$  ont même groupe des valeurs et le corps résiduel de  $K(X)$  est une extension transcendante pure du corps résiduel de  $K$ , de degré de transcendance 1. On dit que  $K(X)$  est une extension (valuée) "inerte" de  $K$ .

Soit  $Y = \pi^{-1}(X - x_0)$ , on a pour tout  $x \in K$   $|Y - x| = \max(1, |x|)$ . En décomposant  $P(Y) = \sum_{i=0}^d a_i Y^i$  en produit de polynômes de degré 1 on montre facilement que  $|P(Y)| = \max_i |a_i|$ , ce qui montre que  $|K^\times| = |K(X)^\times|$ . Il suit aussi facilement que le corps résiduel de  $K(X)$  est l'extension transcendante pure  $k(y)$  de  $k$  où  $k$  est le corps résiduel de  $K$  et  $y$  l'image résiduelle de  $Y$ . On peut toujours construire une extension valuée transcendante de degré 1 du 1<sup>er</sup> type d'un corps  $K$  [2, Sect. 10].

*2<sup>ème</sup> type.* Il existe  $x_0 \in K$  tel que  $|X - x_0| = r$  et  $r \notin |K^\times|$ . Alors  $K$  et  $K(X)$  ont le même corps résiduel et  $|K(X)^\times| = |K^\times| r^{\mathbb{Z}}$ . On dit que  $K(X)$  est une extension (valuée) "totalement ramifiée" de  $K$ .

Soit  $Y = X - x_0, a, b \in K^\times, i, j \in \mathbb{N}$  avec  $i \neq j$ , alors  $|aY^i| \neq |bY^j|$  puisque  $|K^\times|$  est un groupe divisible. Ceci montre que

$$\left| \sum_{i=0}^d a_i Y^i \right| = \max_i |a_i Y^i|$$

et ainsi que  $|K(X)^\times| = |K^\times| r^{\mathbb{Z}}$ . Soit  $a \in K$  on a

$$\frac{1}{Y - a} = \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{Y^{i+1}} + \frac{1}{Y - a} \left( \frac{a}{Y} \right)^{n+1} \quad \text{si } |Y| > |a|$$

et

$$\frac{1}{Y - a} = - \sum_{i=0}^n \frac{Y^i}{a^{i+1}} + \frac{1}{Y - a} \left( \frac{Y}{a} \right)^{n+1} \quad \text{si } |Y| < |a|$$

ce qui montre que  $K[Y, 1/Y]$  est dense dans  $K(Y) = K(X)$ . Plus précisément tout élément  $f \in K(X)^\wedge$  s'écrit de façon unique sous la forme  $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i Y^i$  avec  $\lim_{|i| \rightarrow \infty} |a_i| r^i = 0$  et  $|f| = \max_i |a_i| r^i$ . Si  $|K^\times| = \mathbb{R}_{>0}$  (où  $\mathbb{R}_{>0}$  désigne

les nombres réels strictement positifs), il n'existe pas d'extension de  $K$  transcendante de degré 1, valuée, du 2<sup>ème</sup> type.

3<sup>ème</sup> type. Pour tout  $x \in K$  on a  $|X - x| > r$ . Alors  $K$  et  $K(X)$  ont le même groupe des valeurs et le même corps résiduel. On dit que  $K(X)$  est une extension (valuée) immédiate de  $K$ .

Soit  $P(X) = b \prod_{i=1}^d (X - a_i) \in K[X]$ , il existe  $x \in K$  tel que  $|X - x| < |X - a_i|$  pour  $1 \leq i \leq d$ . On a

$$P(x) = b \prod_{i=1}^d (X - a_i) \times \left( 1 + \frac{x - X}{X - a_i} \right),$$

ce qui montre que  $|P(x) - P(X)| < |P(X)|$ , ainsi  $|K^\times| = |K(X)^\times|$  et tout polynôme de  $K(X)^0$  est congru à un élément de  $K^0$  modulo  $K(X)^{00}$ . Soit  $a \in K$ , il existe  $x \in K$  tel que  $|X - x| < |X - a|$  et on a

$$\frac{1}{X - a} = \sum_{i=0}^n \frac{(x - X)^i}{(x - a)^{i+1}} + \frac{1}{(x - a)} \times \left( \frac{x - X}{x - a} \right)^{n+1},$$

ce qui montre que  $K[X]$  est dense dans  $K(X)$  et donc que  $K$  et  $K(X)$  ont le même corps résiduel. Si  $K$  est maximale complet il n'existe pas d'extension valuée transcendante de degré 1 du 3<sup>ème</sup> type de  $K$ .

### 1. SOUS-CORPS FERMÉS DE $K(X)^\wedge$

Nous rappelons d'abord des propriétés des fonctions analytiques sur un corps valué (Section 1.1) qui sont indispensables pour l'étude des sous-corps fermés de  $K(X)^\wedge$  (Section 1.2).

#### 1.1. Fonctions analytiques sur un corps valué [3, théorème 1.1]

Soient  $E$  un corps valué,  $\theta \in E$ ,  $r > 0$  un nombre réel,  $D = \{z \in E / |z - \theta| \leq r\}$  (resp.  $D = \{z \in E / |z - \theta| < r\}$ ); on note  $\mathcal{H}_{E,D}$  l'ensemble des fonctions  $E$ -analytiques sur  $D$ , c'est-à-dire des séries entières  $f(Z) = \sum_{i \geq 0} a_i (Z - \theta)^i$  où  $a_i \in E$ , telles que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} |a_i| r^i = 0$  (resp.  $\lim_{i \rightarrow +\infty} |a_i| r'^i = 0$  pour tout réel  $r'$  tel que  $0 \leq r' < r$ ).

Soit  $f(Z) = \sum_{i \geq 0} a_i (Z - \theta)^i \in \mathcal{H}_{E,D}$ . On définit  $|f|_D$  par

$$|f|_D = \max_{i \geq 0} |a_i| r^i. \tag{1}$$

Si le groupe des valeurs de  $E$  est dense ou si son corps résiduel est infini, on a

$$|f(Z)|_D = \sup_{z \in D} |f(z)|. \tag{2}$$

Si  $z$  est un zéro de  $f$ , on a  $z \in \bar{E}$ . \tag{3}

Si  $E$  est algébriquement clos et si  $f$  est sans zéro dans  $D$ , on a

$$|f(Z)|_D = |a_0| > |a_i| r^i \quad \text{pour tout } i > 0 \tag{4}$$

et

$$|f(Z)|_D = |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in D. \tag{5}$$

1.2. *Sous-corps fermés de  $K(X)^\wedge$*

PROPOSITION 1. *Soient  $\bar{K}$  un corps valué complet,  $K(X)$  une extension valuée de  $K$  telle que  $X \notin \bar{K}$ ,  $F$  un corps fermé intermédiaire entre  $K$  et  $K(X)^\wedge$ . Alors, si  $F$  n'est pas inclus dans  $\bar{K}$ ,  $K(X)^\wedge$  est une extension algébrique finie de  $F$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y \in F$ ,  $Y \notin \bar{K}$ . Montrons que  $X \in \overline{K(Y)^\wedge}$ . Soient

$$r_X = \inf_{x \in \bar{K}} |X - x|, \quad c = \inf_{x \in \bar{K}} |Y - x| \tag{6}$$

et  $D = \{z \in \overline{K(X)} \mid |X - z| < r_X\}$ . Pour chaque  $f(Z) \in \overline{K(X)}(Z)$  sans pôle dans  $D$  il existe une suite  $(x_i)$  d'éléments de  $\bar{K}$  telle que  $x_i$  ne soit pas un pôle de  $f$ ,  $|X - x_i|$  tende vers  $r_X$  et

$$|f|_D = \lim_{i \rightarrow +\infty} |f(x_i)|. \tag{7}$$

Soient  $(Y_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $K(X)$  convergente vers  $Y$  et, pour tout  $n$ ,  $f_n(Z) = Y - Y_n(Z)$ . A cause de (6)  $Y_n(Z)$  est sans pôle dans  $D$ , donc  $f_n(Z)$  aussi et les relations (7) et (6) montrent que

$$|f_n(Z)|_D \geq c. \tag{8}$$

On a  $f_n(X) = Y - Y_n(X)$ , donc il existe  $n_0$  tel que (avec (8))

$$|f_{n_0}(x)| = |Y - Y_{n_0}(X)| < c \leq |f_{n_0}(Z)|_D.$$

Il résulte alors de (5) que  $f_{n_0}(Z)$  a un zéro  $\theta$  dans  $D$ , d'après (3)  $\theta \in \overline{K(Y)^\wedge}$ . Soit  $D_1 = \{z \in K(Y)^\wedge(\theta) \mid |z - \theta| < r_X\} = D \cap K(Y)^\wedge(\theta)$ . On a

$$f_{n+1}(Z) - f_n(Z) = Y_{n+1}(Z) - Y_n(Z) \in K(Z),$$

par conséquent, d'après (6),  $f_{n+1}(Z) - f_n(Z)$  est sans zéro dans  $D$ ; il suit donc de (5)

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(Z) - f_n(Z)|_{D_1} &= |f_{n+1}(Z) - f_n(Z)|_D = |Y_{n+1}(Z) - Y_n(Z)|_D \\ &= |Y_{n+1}(X) - Y_n(X)|. \end{aligned} \tag{9}$$

La relation (9) montre que  $(f_n(Z))$  est une suite convergente d'éléments de  $\mathcal{H}_{K(Y)^\wedge(\theta), D}$ , et (8) montre que sa limite  $f(Z)$  est non nulle. On a

$$f(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Y - Y_n(X)) = 0$$

donc, d'après (3),  $X \in \overline{K(Y)^\wedge(\theta)} = \overline{K(Y)^\wedge}$ .

*Remarque 1.* Le lemme 1 de [7] montre que  $\overline{K(Y)^\wedge} = \overline{K(X)^\wedge}$ , mais on ne peut en déduire que  $X$  est algébrique sur  $K(Y)^\wedge$ .

*Remarque 2.* La proposition 1 montre donc que  $\hat{F} = \overline{K(X)^\wedge}$ , ainsi les sous-corps fermés et algébriquement clos de  $\overline{K(X)^\wedge}$  doivent être recherchés en considérant des extensions de  $K$  engendrées par des éléments de  $\overline{K(X)^\wedge}$  n'appartenant pas à  $\overline{K(X)^\wedge}$ .

*Remarque 3.* Si le corps  $K$  est algébriquement clos, on peut montrer un analogue du théorème de Lüroth. Tout sous-corps fermé  $F$  de  $\widehat{K(X)}$ , tel que  $F \neq K$ , est de la forme  $F = \widehat{K(Y)}$ , où  $Y$  n'appartient pas nécessairement à  $K(X)$  ([9]).

## 2. SOUS-CORPS FERMÉS ET ALGÈBRIQUEMENT CLOS DE $\widehat{K(X)}$ EN CARACTÉRISTIQUE RÉSIDUELLE ZÉRO

On montre qu'il n'existe pas de corps fermé algébriquement clos non trivial entre  $K$  et  $\widehat{K(X)}$  si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle. On en donne deux démonstrations, l'une "analytique" utilisant la proposition 1, l'autre suggérée par Marius van der Put, utilisant les modules universels des différentielles continues.

**THÉORÈME 1.** *Soient  $K$  un corps valué complet de caractéristique résiduelle nulle,  $\widehat{K(X)}$  une extension transcendante valuée de  $\widehat{K}$ . Alors, les seuls corps fermés algébriquement clos intermédiaires entre  $K$  et  $\widehat{K(X)}$  sont  $\widehat{K}$  et  $\overline{K(X)}$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $K$  algébriquement clos. Soit  $Y \in \overline{K(X)}$ ,  $Y \notin \widehat{K}$ , alors

$$\text{l'extension } \overline{K(Y)^\wedge(X)}/\overline{K(Y)^\wedge} \text{ est immédiate.} \quad (10)$$

Cette formule résulte de

$$\text{l'extension } K(Y)/K \text{ est du même type que } K(X)/K \quad (10')$$

(le type d'une extension a été rappelé au paragraphe 0). En effet (10') implique (10) de manière évidente si l'extension  $K(X)/K$  est du 3<sup>ème</sup> type, si

$K(X)/K$  est du 1<sup>er</sup> type (resp. 2<sup>ème</sup> type), (10') montre que  $\overline{K(\widehat{X})}$  et  $\overline{K(\widehat{Y})}$  ont même corps résiduel (resp. même groupe des valeurs). Montrons (10'). Soit  $Y' \in \overline{K(\widehat{X})}$  tel que  $|Y - Y'| \leq \inf_{x \in K} |Y - x|$ . Pour tout  $x \in K$  on a  $|Y - x| = |Y' - x|$ , donc  $r_Y = \inf_{x \in K} |Y - x| \in |K^\times|$  si et seulement si  $r_{Y'} = \inf_{x \in K} |Y' - x| \in |K^\times|$  et il existe  $x \in K$  tel que  $|Y - x| = r_Y$  si et seulement si il existe  $x \in K$  tel que  $|Y' - x| = r_{Y'}$ . Par conséquent  $K(Y)/K$  est du même type que  $\overline{K(Y')}/K$ , qui est du même type que  $K(X)/K$  car  $Y' \in \overline{K(\widehat{X})}$  implique  $\overline{K(Y')} = \overline{K(\widehat{X})}$ .

Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux éléments de  $\overline{K(\widehat{X})}$ , alors

$$K \not\subseteq \overline{K(\widehat{Y}_1)} \subset \overline{K(\widehat{Y}_2)} \not\subseteq \overline{K(\widehat{X})} \text{ implique } \overline{K(\widehat{Y}_1)} = \overline{K(\widehat{Y}_2)}. \tag{11}$$

En effet, (10) dit que  $\overline{K(\widehat{Y}_1)}(X)$  est une extension immédiate de  $\overline{K(\widehat{Y}_1)}$ , donc, d'après le "Defektsatz" d'Ostrowski [10; 2, Sect. 8, ex. 9] on a  $(\overline{K(\widehat{Y}_1)}(X))^\wedge = (\overline{K(\widehat{Y}_1)})^\wedge$ , par suite  $(\overline{K(\widehat{Y}_1)}(X))^\wedge = \overline{K(\widehat{X})}$ . La proposition 1 implique que les corps fermés et algébriquement clos entre  $\overline{K(\widehat{Y}_1)}$  et  $(\overline{K(\widehat{Y}_1)}(X))^\wedge = \overline{K(\widehat{X})}$  sont  $\overline{K(\widehat{Y}_1)}$  et  $\overline{K(\widehat{X})}$ , d'où (11).

Soient  $\overline{K(\widehat{Y})}$  un corps fermé et algébriquement clos intermédiaire entre  $K$  et  $\overline{K(\widehat{X})}$  et tel que  $Y \notin K$ , alors il existe un isomorphisme isométrique entre  $\overline{K(\widehat{Y})}$  et  $\overline{K(\widehat{X})}$ . En effet, si  $K(X)/K$  est du troisième type, le "Defektsatz" montre que  $\overline{K(\widehat{X})} = K(X)^\wedge$  et la proposition 1 implique que  $\overline{K(\widehat{Y})} = \overline{K(\widehat{X})}^\wedge$ . Si  $\overline{K(X)}/K$  n'est pas du troisième type, comme (10) montre que  $\overline{K(\widehat{Y})}(X)/\overline{K(\widehat{Y})}$  est du troisième type, les extensions  $K(X)/K$  et  $\overline{K(\widehat{Y})}(X)/\overline{K(\widehat{Y})}$  ne sont pas alors du même type, donc

$$\inf_{y \in \overline{K(\widehat{Y})}} |X - y| < \inf_{x \in K} |X - x|.$$

Par conséquent, il existe  $y \in \overline{K(\widehat{Y})}$  tel que (puisque  $\overline{K(\widehat{Y})}$  est dense dans  $\overline{K(\widehat{Y})}$ )

$$|X - y| \leq \inf_{x \in K} |X - x|. \tag{12}$$

L'application de  $K(X)$  sur  $K(y)$  qui à une fraction rationnelle  $f(X)$  associe  $f(y)$  est, d'après (12), un isomorphisme isométrique, qui induit un isomorphisme isométrique entre  $\overline{K(\widehat{X})}$  et  $\overline{K(\widehat{y})}$ ; d'autre part  $\overline{K(\widehat{y})} = \overline{K(\widehat{Y})}$  puisque  $y \in \overline{K(\widehat{Y})}$ .

Soit  $K \not\subseteq \overline{K(\widehat{Y})} \not\subseteq \overline{K(\widehat{X})}$  et soit  $\varphi$  l'isomorphisme isométrique précédent entre  $\overline{K(\widehat{Y})}$  et  $\overline{K(\widehat{X})}$ . On a

$$K \not\subseteq \varphi^{-1}(\overline{K(\widehat{Y})}) \not\subseteq \overline{K(\widehat{Y})} \not\subseteq \overline{K(\widehat{X})}$$

qui contredit (11), donc  $\overline{K(\widehat{Y})}$  n'existe pas.

*Deuxième démonstration du théorème 1.* Une démonstration utilisant les modules des différentielles continues [11] nous a été suggérée par Marius van der Put. Soit  $K$  un corps valué et  $L$  une extension valuée de  $K$ , on note  $(d_{L/K}, \Omega_{L/K}^b)$  le module universel des  $K$ -différentielles bornées de  $L$  [11]. Le lemme suivant est une conséquence simple du théorème 6.1 de [11].

**LEMME 1.** *Soient  $K$  un corps valué de caractéristique résiduelle nulle,  $L$  une extension valuée de  $K$  et  $E$  une extension valuée de  $L$ . Alors la suite de  $E$ -espaces de Banach*

$$0 \longrightarrow \Omega_{L/K}^b \widehat{\otimes}_L E \xrightarrow{\alpha} \Omega_{E/K}^b \xrightarrow{\beta} \Omega_{E/L}^b \longrightarrow 0$$

est exacte ( $\alpha$  et  $\beta$  sont les homomorphismes naturels).

Reprenons les notations du théorème 1 et supposons  $K$  algébriquement clos. Quitte à faire une translation de  $X$  par un élément de  $K$  on peut supposer que

si  $K(X)/K$  n'est pas du troisième type,

$$\text{alors } |X| = \inf_{x \in K} |X - x| = r_X. \tag{13}$$

Soit  $D$  une  $K$ -dérivation de  $K(X)$  dans un  $K(X)^\wedge$ -espace de Banach  $(M, \|\cdot\|)$ , un calcul facile montre que, sous l'hypothèse (13), on a pour tout  $f(X) \in K(X)$

$$\|D(f(X))\| \leq |f(X)| r_X^{-1} \|D(X)\|,$$

donc  $D$  est continue. Il en résulte que  $\Omega_{K(X)^\wedge/K}^b$  est de dimension 1 sur  $K(X)^\wedge$ . Le lemme 1 appliqué à  $K, K(X)^\wedge$  et  $\overline{K(X)}$  joint au fait que  $\Omega_{\overline{K(X)}/K(X)^\wedge}^b = \{0\}$  (corollaire 6.3 de [11]) montre que la dimension sur  $\overline{K(X)}$  de  $\Omega_{\overline{K(X)}/K}^b$  est 1. Soit  $Y \in \overline{K(X)}, Y \notin K$ ; le lemme 1 appliqué à  $K, \overline{K(Y)}, \overline{K(X)}$  montre alors que  $\Omega_{\overline{K(X)}/\overline{K(Y)}}^b = \{0\}$ , donc que  $\overline{K(Y)} = \overline{K(X)}$  (d'après (6.3) de [11]).

*Remarque.* Si la caractéristique résiduelle de  $K$  est non nulle, on a  $\Omega_{\overline{K(X)}/K}^b = \{0\}$ , donc la méthode précédente n'est pas applicable.

### 3. SOUS-CORPS FERMÉS ALGÈBRIQUEMENT CLOS DE $\overline{K(X)}$ EN CARACTÉRISTIQUE RÉSIDUELLE POSITIVE

Dans le cas de caractéristique résiduelle positive nous montrons qu'il existe une infinité de sous-corps fermés algébriquement clos intermédiaires entre  $K$  et  $\overline{K(X)}$ . Pour ce faire on construit (Section 3.2) un élément  $Y$  de



$\widehat{K(X)}$  tel que  $\widehat{K} \subsetneq \widehat{K(Y)} \subsetneq \widehat{K(X)}$ . Le corps  $\widehat{K(Y)}$  étant  $\widehat{K}$ -isomorphe et isométrique à  $\widehat{K(X)}$  il s'ensuit que  $\widehat{K(Y)}$  possède la même propriété que  $\widehat{K(X)}$ , ainsi on déduit l'existence d'une infinité de sous-corps fermés algébriquement clos. L'outil principal est la différentielle des extensions algébriques séparables (infinies) de corps valués ainsi que la notion de corps hyperparfait dont nous donnons les propriétés au paragraphe 3.1.

3.1. *La différentielle dans les extensions valuées et les corps hyperparfaits*

Nous disons qu'un corps valué  $K$  de caractéristique résiduelle  $p \neq 0$  est hyperparfait si tout élément de  $K$  est convenablement approché par la puissance  $p$ -ième d'un élément de  $K$ . Le résultat principal de ce paragraphe est la proposition 2 selon laquelle la différentielle  $\mathcal{D}_{\widehat{K}/K}$  est de valeur absolue 1 (i.e.,  $\sup_{x \in \mathcal{D}_{\widehat{K}/K}} |x| = 1$ ) si le corps  $K$  est hyperparfait.

DÉFINITION [14, chap. III, Sect. 3]. Soient  $K$  un corps valué complet et  $L$  une extension de  $K$  algébrique, séparable et de degré fini. On désigne par  $\text{Tr}_{L/K}$  la trace de  $L$  sur  $K$  et on appelle *différente de  $L$  sur  $K$*  l'idéal  $\mathcal{D}_{L/K}$  de l'anneau de valuation  $L^0$  de  $L$  dont l'inverse est ainsi défini:

$$\mathcal{D}_{L/K}^{-1} = \{x \in L / \text{Tr}_{L/K}(xL^0) \subset K^0\}.$$

Comme dans [4] on définit la différentielle pour les extensions infinies de corps valués.

DÉFINITION. Soient  $K$  un corps valué complet et  $L$  une extension algébrique, séparable de  $K$ . On appelle *différente de  $L$  sur  $K$*  l'idéal  $\mathcal{D}_{L/K}$  de  $L^0$  défini par:

$$\mathcal{D}_{L/K} = \bigcap_i (\mathcal{D}_{L_i/K} \cdot L^0)$$

où l'intersection est prise suivant l'ensemble des corps  $L_i$  intermédiaires entre  $K$  et  $L$  et de degrés finis sur  $K$ .

On appelle *valeur absolue* de  $\mathcal{D}_{L/K}$  le nombre réel noté  $|\mathcal{D}_{L/K}|$  et défini par

$$|\mathcal{D}_{L/K}| = \sup_{x \in \mathcal{D}_{L/K}} |x|.$$

Nous aurons aussi besoin de la notion suivante:

DÉFINITION. Soient  $K$  un corps valué,  $E$  un  $K$ -espace normé de dimension  $n$ ,  $\|\cdot\|$  sa norme. Soit  $c$  un nombre réel tel que  $0 < c \leq 1$ . On dit

qu'une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  sur  $K$  est une  $c$ -base de  $E$  sur  $K$  si pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  appartenant à  $K$ , on a

$$c \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \|e_i\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|.$$

LEMME 2. Soient  $K$  un corps valué complet,  $M$  une extension de  $K$ , algébrique, séparable et de degré  $n$ . Soit  $c$  un nombre réel tel que  $0 < c < 1$ . Alors il existe une  $c$ -base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $M$  sur  $K$  possédant les propriétés suivantes:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |e_i| \leq 1, \quad e_1 = 1,$$

$$|\mathcal{D}_{M/K}^{-1}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |e_i^*| \leq c^{-1} |\mathcal{D}_{M/K}^{-1}|$$

où  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  désigne la base duale de  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  par rapport à la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto \text{Tr}_{M/K}(xy)$ .

La démonstration est la même que celle du lemme 8 de [5].

DÉFINITION. Un corps valué  $K$  de caractéristique résiduelle  $p$  non nulle est dit *hyperparfait* s'il est parfait et s'il existe une constante  $c_K$  vérifiant les propriétés suivantes:

$$0 \leq c_K < 1,$$

pour tout  $x \in K$  il existe  $y \in K$  tel que  $|x - y^p| \leq c_K |x|$ .

On appelle *constante de perfection* du corps  $K$  toute constante  $c_K$  vérifiant les relations précédentes.

*Remarque.* Un corps de caractéristique positive est hyperparfait si et seulement si il est parfait. Si  $K$  est hyperparfait, il en est de même de  $\hat{K}$ .

LEMME 3. Soit  $K$  un corps hyperparfait de caractéristique résiduelle  $p$ , soit  $c = \inf c_K$  où  $c_K$  parcourt les constantes de perfection de  $K$ , alors on a

$$c \leq |p|^{p/(p-1)}.$$

*Démonstration.* Soit  $c_K$  une constante de perfection de  $K$ . Soient  $x \in K$  et  $\tilde{x} \in K$  tels que  $|x - \tilde{x}^p| \leq c_K |x|$ . Soient  $x_1 = x - \tilde{x}^p$  et  $\tilde{x}_1 \in K$  tels que  $|x_1 - \tilde{x}_1^p| \leq c_K |x_1|$ . On a

$$|x - (\tilde{x} + \tilde{x}_1)^p| \leq \max(c_K^2, |p| c_K^{1/p}) |x|,$$

par suite  $\max(c_K^2, |p| c_K^{1/p})$  est une constante de perfection de  $K$ . Si  $c = \inf c_K$ , on a donc  $\max(c^2, |p| c^{1/p}) \geq c$ .

**PROPOSITION 2.** *Soit  $K$  un corps hyperparfait. Alors la différentielle  $\mathcal{D}_{\bar{K}/K}$  est de valeur absolue 1.*

La démonstration nécessite deux autres lemmes.

**LEMME 4.** *Soient  $K$  un corps hyperparfait de caractéristique nulle et  $N$  une extension algébrique de  $K$  tels que la différentielle  $\mathcal{D}_{N/K}$  soit de valeur absolue 1. Alors  $N$  est hyperparfait.*

*Démonstration.* On suppose que l'extension  $N|K$  est finie. Soient  $0 < c < 1$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une  $c$ -base de  $N$  sur  $K$  telle que (lemme 2)

$$e_1 = 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |e_i^*| \leq c^{-1}.$$

Choisissons  $c$  tel que  $|p| c^{-p} < 1$ . On a pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$|1 - \text{Tr}_{N/K}(e_i e_i^*)^p| < 1$$

et pour tout  $i \neq j$

$$|\text{Tr}_{N/K}(e_i e_i^*)^p| < |e_i^p|.$$

Soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^p$ ,  $\lambda_i \in K$  et soit  $i_0$  tel que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i e_i^p| = |\lambda_{i_0} e_{i_0}^p|.$$

On a

$$|x| c^{-p} \geq |\text{Tr}_{N/K}(x(e_{i_0}^*)^p)| = |\lambda_{i_0}|,$$

donc  $(e_i^p)_{1 \leq i \leq n}$  est une  $c^p$ -base de  $N$  sur  $K$ . Soit  $c_K$  une constante de perfection de  $K$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^p$  avec  $\lambda_i \in K$  et pour tout  $i = 1, \dots, n$  soit  $\tilde{\lambda}_i \in K$  tel que  $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i^p| \leq c_K |\lambda_i|$ . On a

$$\left| x - \left( \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i e_i \right)^p \right| \leq \max(c_K c^{-p}, |p| c^{-p}) |x|.$$

Pour  $c$  suffisamment proche de 1,  $c_N = \max(c_K c^{-p}, |p| c^{-p})$  est une constante de perfection de  $N$ . Avec le lemme 3 il en résulte le cas général.

**LEMME 5.** *Soit  $K$  un corps valué complet de caractéristique zéro et de caractéristique résiduelle  $p$  non nulle. Soient  $\varepsilon > 0$  un nombre réel et  $a$  un*

élément de  $K$  de valeur absolue 1. On suppose qu'il existe un élément  $\tilde{a}$  de  $K$  tel que

$$|a - \tilde{a}^p| \leq |p|^{(p-\varepsilon)/(p-1)}.$$

Alors on a

$$|\mathcal{D}_{K(\sqrt[p]{a})/K}| \geq |p|^\varepsilon.$$

C'est le lemme 5 de [5].

*Démonstration de la proposition 2.* Si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ , c'est une conséquence de la proposition 10 de [5]. Supposons donc  $K$  de caractéristique nulle. Il suffit de montrer que pour toute extension galoisienne  $L$  de  $K$  contenant une racine primitive  $\zeta$   $p$ -ième de l'unité, on a  $|\mathcal{D}_{L/K}| = 1$ . Soit  $L$  une telle extension de  $K$ ,  $n$  son degré; posons  $n = qp^r$  où  $q$  est premier à  $p$ . Soit  $M$  un sous-corps de  $L$  de degré  $q$  sur  $K$ . La racine de l'unité  $\zeta$  appartient à  $M$ . On a  $|\mathcal{D}_{M/K}| = 1$ . En effet, supposons qu'il existe  $x \in \mathcal{D}_{M/K}^{-1}$  tel que  $|x| > 1$ ,  $|K^\times|$  étant dense, soit  $\pi \in K$  tel que  $1 < |\pi| < |x|$ , on a

$$\mathrm{Tr}_{M/K} \left( x \cdot \frac{\pi}{x} \right) = q\pi \in K^0$$

ce qui est faux. Il reste donc à prouver que  $|\mathcal{D}_{L/M}| = 1$ . Le corps  $M$  est hyperparfait (lemme 4) et contient une racine primitive  $p$ -ième de l'unité, des lemmes 3 et 5 on déduit donc que, pour toute extension cyclique  $F$  de  $M$ , l'on a  $|\mathcal{D}_{F/M}| = 1$ . Puisque  $\mathrm{Aut}(L/M)$  est un  $p$ -groupe, la proposition est démontrée.

Nous aurons aussi besoin des deux lemmes suivants:

**LEMME 6.** Soient  $K$  un corps valué complet de caractéristique  $p > 0$ ,  $L$  une extension algébrique séparable de  $K$ , de différentielle non nulle et telle que le corps  $\hat{L}$  soit parfait. Alors  $K$  est un corps parfait.

*Démonstration.* Les racines  $p$ -ièmes des éléments de  $K$  sont dans  $\hat{L}$  puisque ce corps est parfait. Soient donc  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in K$  et  $y \in L$  tels que  $|x - y^p| \leq \varepsilon$ . Soient  $c$  tel que  $0 < c < 1$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une  $c$ -base de  $K(y)$  sur  $K$  donnée par le lemme 2, c'est-à-dire telle que

$$e_1 = 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| \leq 1 \quad \text{et}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |e_i^*| \leq (c |\mathcal{D}_{K(y)/K}|)^{-1} \leq (c |\mathcal{D}_{L/K}|)^{-1}$$

posons  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  où les  $\lambda_i$  sont dans  $K$ . Alors, pour  $i \neq 1$

$$\lambda_i^p = \text{Tr}_{K(y)/K}(y^p e_i^{*p})$$

d'où puisque  $\text{Tr}_{K(y)/K}(e_i^{*p}) = (\text{Tr}_{K(y)/K}(e_i e_i^*))^p = 0$

$$\lambda_i^p = \text{Tr}_{K(y)/K}((y^p - x) e_i^{*p}),$$

donc

$$|y^p - \lambda_1^p| \leq |(y^p - x) e_1^{*p}| \leq \varepsilon (c |\mathcal{D}_{L/K}|)^{-p}$$

par suite  $|x - \lambda_1^p| \leq \varepsilon (c |\mathcal{D}_{L/K}|)^{-p}$ . Le corps  $K$  est donc parfait.

**LEMME 7.** *Soient  $K$  un corps valué complet,  $L$  une extension algébrique séparable de  $K$  et  $N$  une extension algébrique finie et séparable de  $L$ . Alors les corps  $N$  et  $\hat{L}$  sont linéairement disjoints sur  $L$  et la différence  $\mathcal{D}_{\hat{N}/\hat{L}}$  est l'adhérence de la différence  $\mathcal{D}_{N/L}$ .*

*Démonstration.* Soient  $G = \text{Aut}(\bar{K}/L)$  et  $H = \text{Aut}(\bar{K}/\hat{L} \cap \bar{K})$ . On a  $G \subset H$ , donc  $\hat{L} \cap \bar{K} \subset L^{p^{-\infty}}$ , d'où la linéaire disjonction de  $N$  et  $\hat{L}$  sur  $L$ . Soient  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $x \in \mathcal{D}_{\hat{N}/\hat{L}}^{-1}$  et  $y \in N$  tels que  $|x - y| < \varepsilon$ . On a pour tout  $z \in N^0$

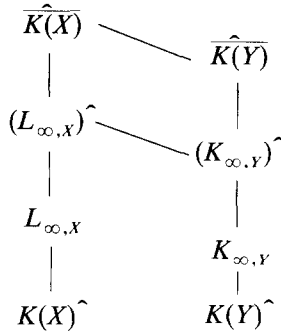
$$\text{Tr}_{N/L}(yz) = \text{Tr}_{\hat{N}/\hat{L}}(yz) = \text{Tr}_{\hat{N}/\hat{L}}(xz) + \text{Tr}_{\hat{N}/\hat{L}}((y - x)z)$$

donc  $y \in \mathcal{D}_{N/L}^{-1}$ . Par suite  $(\mathcal{D}_{N/L}^{-1})^\wedge \supset \mathcal{D}_{\hat{N}/\hat{L}}^{-1}$ .

### 3.2. Le théorème principal

**THÉORÈME 2.** *Soient  $K$  un corps valué complet de caractéristique résiduelle non nulle,  $\hat{K}(X)$  une extension transcendante valuée de  $\hat{K}$ . Alors il existe une infinité de corps algébriquement clos et complets intermédiaires entre  $K$  et  $\hat{K}(X)$ .*

*Donnons d'abord un résumé de la démonstration pour  $K$  de caractéristique zéro. On construit une extension  $L_{\infty, X}$  de  $K(X)^\wedge$  qui possède les propriétés suivantes: d'une part  $|\mathcal{D}_{L_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| \neq 0$ , d'autre part il existe  $Y \in (L_{\infty, X})^\wedge$  tel que pour tout  $n \geq 0$ ,  $Y$  possède une racine  $p^n$ -ième dans  $(L_{\infty, X})^\wedge$  notée  $Y^{p^{-n}}$ . Il s'ensuit que le corps  $K_{\infty, Y} = \bigcup_{n \geq 0} K(Y^{p^{-n}}) \subset (L_{\infty, X})^\wedge$  est hyperparfait. Si on suppose  $\hat{K}(Y) = \hat{K}(X)$  on déduit que  $|\mathcal{D}_{(L_{\infty, X})^\wedge / (L_{\infty, X})^\wedge}| = 1$  parce que  $K_{\infty, Y}$  est hyperparfait, et que  $|\mathcal{D}_{(L_{\infty, X})^\wedge / (L_{\infty, X})^\wedge}| = 0$  parce que  $|\mathcal{D}_{L_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| \neq 0$ . D'où la contradiction.*



*Démonstration du théorème 2.* On suppose que la valeur absolue de  $K$  est non triviale. Outre les résultats du paragraphe 3.1, la démonstration nécessite de nombreux lemmes. On peut supposer  $K$  algébriquement clos, soit  $p \neq 0$  sa caractéristique résiduelle. Pour tout  $y \in \widehat{K(X)}$  posons

$$r_y = \inf_{x \in K} |y - x| \tag{14}$$

quitte à changer  $X$  en  $\alpha X + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des éléments de  $K$  on peut supposer que  $X$  vérifie la condition (C) suivante:

- $$(C) \left\{ \begin{array}{l}
 1. \text{ si l'extension } K(X)/K \text{ est du premier type,} \\
 \qquad \qquad \qquad |X| = r_X = 1, \\
 2. \text{ si l'extension } K(X)/K \text{ est du deuxième type,} \\
 \qquad \qquad \qquad |X| = r_X, \\
 3. \text{ si l'extension } K(X)/K \text{ est du troisième type,} \\
 \qquad \qquad \qquad |p||X| < r_X.
 \end{array} \right.$$

3.2.1. Construction de  $L_{\infty, X}$ , extension algébrique séparable de  $\widehat{K(X)}$  de différente non nulle

LEMME 8. Les hypothèses sont celles du théorème 2, on suppose de plus  $K$  algébriquement clos et que  $X$  vérifie (C). Soit  $a$  un élément de  $K$  tel que

$$|a||X|^{1/p} < r_X. \tag{15}$$

Alors le polynôme  $P(Z) = Z^p - aZ - X$  de  $\widehat{K(X)}[Z]$  est irréductible.

*Démonstration.* Soit  $z \in \widehat{K(X)}$  tel que  $P(z) = 0$ . Il résulte aisément de (15) que

$$|z| = |X|^{1/p}. \tag{16}$$

— Si  $K(X)/K$  est du premier type: soient  $k$  le corps résiduel de  $K$ ,  $\bar{X}$  la classe de  $X$  dans le corps résiduel de  $K(X)$  qui s'écrit alors  $k(\bar{X})$ ; compte tenu de (C),  $P(Z)$  a pour image canonique dans  $k(\bar{X})[Z]$ ,  $\bar{P}(Z) = Z^p - \bar{X}$  qui est irréductible.

— Si  $K(X)/K$  est du deuxième type, on a, d'après (16) et (C),  $|z|^i = |X|^{i/p} = r_x^{i/p} \notin |K(X)^\times|$  pour  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , donc  $z$  engendre une extension de degré  $p$  de  $K(X)^\wedge$ .

— Si  $K(X)/K$  est du troisième type. Les extensions algébriques de  $K(X)^\wedge$  sont alors immédiates, donc de degré sur  $K(X)^\wedge$  une puissance de  $p$  (d'après le "Defektsatz": [10; 2, Sect. 8, ex. 9]; par conséquent  $P(Z)$  est réductible dans  $K(X)^\wedge[Z]$  si et seulement si  $z \in K(X)^\wedge$ . Supposons que  $z \in K(X)^\wedge$ , il existe  $f(X) \in K[X]$  tel que

$$|z - f(X)| < |p||z|. \tag{17}$$

On a

$$P(f(X)) = P(f(X)) - P(z) = (f(X) - z) \left( \sum_{i=1}^{p-1} f(X)^{p-1-i} z^i - a \right)$$

donc, avec (15), (16) et (17)

$$|P(f(X))| < |p||X|. \tag{18}$$

Les polynômes  $g(Z) = f(Z)^p - af(Z) - Z \in K[Z]$  et  $f(Z) \in K\{Z\}$  sont, d'après la définition de  $r_x$  sans zéro dans  $D(X, r_x) = \{y \in \overline{K(X)} / |X - y| \leq r_x\}$ , car  $D(X, r_x) \cap K = \emptyset$ , donc dans  $D(X, r) = \{y \in \overline{K(X)} / |X - y| \leq r\}$  pour  $r > r_x$  suffisamment proche de  $r_x$ . Posons pour tout  $\omega \in \overline{K(X)}$

$$f(Z) = \sum_{i>0} a_i(\omega)(Z - \omega)^i.$$

Les relations (4) et (5) appliquées à  $D(X, r)$ , à  $g(Z)$  d'une part et  $f(Z)$  d'autre part, montrent que pour tout  $\omega \in D(X, r) \cap K$

$$|g(X)| = |g(\omega)| > |pa_0(\omega)^{p-1} a_1(\omega) - aa_1(\omega) - 1| r$$

et

$$|f(X)| = |f(\omega)| = |a_0(\omega)| > |a_1(\omega)| r$$

d'où l'on déduit avec (16), (17), (18) et puisque  $g(X) = P(f(X))$

$$|pa_0(\omega)^{p-1} a_1(\omega) - aa_1(\omega) - 1| < |p||X| r_x^{-1} \tag{19}$$

$$|a_0(\omega)| > |a_1(\omega)| r_x. \tag{20}$$

La relation (19) et la condition (C) impliquent

$$|pa_0(\omega)^{p-1} - a||a_1(\omega)| = 1$$

qui donne, combinée avec (20),

$$|pa_0(\omega)^p - aa_0(\omega)|r_X^{-1} > 1. \tag{21}$$

Mais il suit de (17), (16), (C) et (15)

$$\begin{aligned} |pa_0(\omega)^p| &= |p||X| < r_X \\ |aa_0(\omega)| &= |a||X|^{1/p} < r_X \end{aligned}$$

qui contredisent (21).

LEMME 9. *Les hypothèses sont celles du lemme 8. Soient  $\omega \in K$ ,  $\varphi(\omega) = \omega^p - a\omega$  et  $z \in \overline{K(X)}$  une racine de  $P(Z) = Z^p - aZ - X$ . Alors  $|z - \omega|^p = |\varphi(\omega) - X|$  et  $r_z = r_X^{1/p}$ .*

*Démonstration.* On a  $|P(\omega)| = |\varphi(\omega) - X|$  et d'autre part, puisque  $P$  est irréductible sur  $K(X) \hat{=} K$  on a  $|P(\omega)| = |\omega - z|^p$ , d'où la première formule. La seconde en est une conséquence, tout élément de  $K$  s'écrivant  $\varphi(\omega)$  pour un  $\omega \in K$  convenable.

LEMME 10. *Les hypothèses sont celles du lemme 8. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $K$  telle que*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad |p|^{p^n}|X| < |a_{n+1}|^{p^n}|X|^{1/p} < r_X, \tag{22}$$

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \neq 0. \tag{23}$$

*Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $\overline{K(X)}$  satisfaisant  $X_0 = X$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1}^p - a_{n+1}X_{n+1} - X_n = 0$ . Soient  $L_{n,X} = K(X) \hat{=} (X_n)$ ,  $L_{\infty,X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{n,X}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_{n+1,X}$  est une extension séparable de degré  $p$  de  $L_{n,X}$  et la différentielle de  $L_{\infty,X}$  sur  $K(X) \hat{=}$  est non nulle.*

*Démonstration.* Il résulte de (22) et des lemmes 8, 9 que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$|X_n| = |X|^{1/p^n} \tag{24}$$

$$r_{X_n} = r_X^{1/p^n} \tag{25}$$

$$|p||X_n| < |a_{n+1}||X_n|^{1/p} < r_{X_n}. \tag{26}$$

Ces formules permettent de montrer le lemme. En effet, (26) et le lemme 8 montrent que  $L_{n+1,X}/L_{n,X}$  est de degré  $p$ , (26) montre aussi que  $P_{n+1}(Z) =$



$Z^p - a_{n+1}Z - X_n$  et son polynôme dérivé  $P'_{n+1}(Z) = pZ^{p-1} - a_{n+1}$  n'ont pas de racine commune, donc  $L_{n+1,X}/L_{n,X}$  est séparable. Soit  $\lambda \in K$  tel que  $|X_n/\lambda^p| \leq 1$ , alors  $X_{n+1}/\lambda$  est racine de  $Q(Z) = Z^p - (a_{n+1}/\lambda^{p-1})Z - X_n/\lambda^p \in L_{n,X}^0[Z]$ , donc (si  $Q'(Z)$  désigne le polynôme dérivé de  $Q(Z)$ )

$$|\mathcal{D}_{L_{n+1,X}/L_{n,X}}| \geq \left| Q' \left( \frac{X_{n+1}}{\lambda} \right) \right|.$$

On a

$$\left| Q' \left( \frac{X_{n+1}}{\lambda} \right) \right| = \left| p \frac{X_{n+1}^{p-1}}{\lambda^{p-1}} - \frac{a_{n+1}}{\lambda^{p-1}} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{\lambda^{p-1}} \right|$$

d'après (26); donc

$$|\mathcal{D}_{L_{n+1,X}/L_{n,X}}| \geq \frac{|a_{n+1}|}{\lambda^{p-1}}$$

pour tout  $\lambda \in K$  tel que  $|X_n/\lambda^p| \leq 1$ . Avec (24) il vient donc

$$|\mathcal{D}_{L_{n+1,X}/L_{n,X}}| \geq \frac{|a_{n+1}|}{|X|^{(p-1)/(p^{n+1})}}.$$

Finalement

$$|\mathcal{D}_{L_{\infty,X}/K(X)}| = \prod_{n=0}^{+\infty} |\mathcal{D}_{L_{n+1,X}/L_{n,X}}| \geq \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|X|^{(p-1)/(p^{n+1})}} \neq 0$$

d'après (23).

3.2.2. Construction de  $Y \in \widehat{K(X)}$  et de  $K_{\infty,Y}$  tels que  $K_{\infty,Y}$  soit hyperparfait

LEMME 11. Les hypothèses sont celles du lemme 10, on suppose de plus que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{p^n} = 0. \tag{27}$$

Alors la suite  $(X_n^{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\widehat{K(X)}$  est convergente, sa limite  $Y$  possède les propriétés suivantes

$$|X - Y| < r_X, Y \notin K \text{ et } Y \text{ vérifie (C)}. \tag{28}$$

Remarque. Il existe des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$  satisfaisant (22), (23) et (27). En effet soit  $\pi \in K$  tel que  $0 < |\pi| < \min\{1, r_X |X|^{-1/p}\}$ . Pour  $n$

suffisamment grand soit  $a_n \in K$  tel que  $a_n^{p^n-1} = \pi^n$  et on définit convenablement les premiers termes de la suite  $(a_n)$ .

*Démonstration du lemme 11.* On a  $X_{n+1}^p = a_{n+1}X_{n+1} + X_n$ , donc, en élevant à la puissance  $p^n$ -ième

$$X_{n+1}^{p^{n+1}} = X_n^{p^n} + \sum_{i=1}^{p^n} \binom{p^n}{i} (a_{n+1}X_{n+1})^i X_n^{p^n-i}$$

d'où l'on déduit

$$|X_{n+1}^{p^{n+1}} - X_n^{p^n}| \leq \max_{1 \leq i < p^n} \left| \binom{p^n}{i} (a_{n+1}X_{n+1})^i X_n^{p^n-i} \right|$$

par suite, avec (24)

$$|X_{n+1}^{p^{n+1}} - X_n^{p^n}| \leq \max_{1 \leq i < p^n} \left\{ \left| \binom{p^n}{i} a_{n+1}^i \right| |X|^{1-i(p-1)/p^{n+1}} \right\}. \quad (29)$$

Soit  $m$  un entier tel que  $0 \leq m \leq n$ , on a (pour  $n$  suffisamment grand)  $|a_{n+1}| < 1$  (d'après (27)), d'où

$$\left| \binom{p^n}{i} a_{n+1}^i \right| \leq \begin{cases} |a_{n+1}|^{p^n-m} & \text{si } p^n-m < i \leq p^n \\ |p|^m & \text{si } 1 \leq i \leq p^n-m \end{cases}$$

qui implique avec (27) et (29) que pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |X_{n+1}^{p^{n+1}} - X_n^{p^n}| \leq |p|^m \max\{|X|^{1/p}, |X|\}$$

d'où, en faisant tendre  $m$  vers l'infini, la convergence de la suite  $(X_n^{p^n})$ .

Pour établir (28) montrons que pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $i = 1, \dots, p^n$  on a

$$\left| \binom{p^n}{i} a_{n+1}^i \right| |X|^{1-i(p-1)/p^{n+1}} < r_X. \quad (30)$$

La formule (22) implique  $|a_{n+1}|^{p^n} |X|^{1/p-1} < r_X |X|^{-1}$  dont il résulte (30) pour  $i = p^n$ ; pour  $i = 1, \dots, p^n - 1$  on a

$$\left| \binom{p^n}{i} \right| |a_{n+1}|^i |X|^{(i/p^n)(1/p-1)} < |p| \left( \frac{r_X}{|X|} \right)^{i/p^n}$$

qui avec (C) donne (30). Les formules (29) et (30) montrent que l'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$|X_{n+1}^{p^{n+1}} - X_n^{p^n}| < r_X.$$

Il résulte que

$$|X_n^{p^n} - X| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1}^{p^{k+1}} - X_k^{p^k}) \right| < r_X$$

donc

$$|Y - X| < r_X$$

et cette formule implique que  $Y \notin K$  et que  $Y$  vérifie (C).

LEMME 12. Soient  $K$  un corps valué complet algébriquement clos et de caractéristique résiduelle  $p$  positive,  $K(Y)$  une extension transcendante valuée de  $K$  telle que  $Y$  vérifie (C). Désignons par  $Y^{p^{-n}}$  une racine  $p^n$ -ième de  $Y$ , posons  $K_{n,Y} = K(Y^{p^{-n}})^{\wedge}$  et  $K_{\infty,Y} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{n,Y}$ .

Supposons que la caractéristique de  $K$  est nulle, alors

$$|p| \leq |\mathcal{D}_{K_{n+1,Y}/K_{n,Y}}| \leq c_n |p| \quad \text{où} \quad c_n = \left[ \frac{r_Y}{|Y|} \right]^{-(p-1)/(p^{n+1})} \quad (31)$$

et

$$|\mathcal{D}_{K_{\infty,Y}/K_{0,Y}}| = 0. \quad (32)$$

*Démonstration.* Le lemme 9 permet de montrer que  $r_{Y^{p^{-n}}} = (r_Y)^{p^{-n}}$  donc  $Y^{p^{-n}}$  vérifie (C). Par conséquent le lemme 8 appliqué à  $K_{n,Y} = K(Y^{p^{-n}})^{\wedge}$  et au polynôme  $Z^p - Y^{p^{-n}}$  montre que  $K_{n+1,Y}$  est une extension de degré  $p$  de  $K_{n,Y}$ . Donc en changeant  $Y$  en  $Y^{p^{-n}}$  on voit qu'il suffit de montrer (31) pour  $n = 0$ .

Soit  $u = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i Y^{i/p}$  ( $\alpha_i \in K_{0,Y}$ ) un élément de  $K_{1,Y}$ . Montrons

$$\max_{0 \leq i \leq p-1} |\alpha_i Y^{i/p}| \leq c_0 |u|. \quad (33)$$

— Si  $K(Y)/K$  est du premier type, alors, compte tenu de (C), le corps résiduel de  $K_{1,Y}$  est une extension de degré  $p$  de celui de  $K_{0,Y}$ , engendrée par la classe de  $Y^{1/p}$ . Donc  $\max |\alpha_i| = 1$  implique  $|u| = 1$  puisque la classe de  $u$  est non nulle; d'où (33),

— Si  $K(Y)/K$  est du deuxième type, (C) montre que  $|Y^{p^{-1}}| \notin |K(Y)^{\wedge \times}|$ , donc les  $|\alpha_i Y^{i/p}|$  sont deux à deux distincts, d'où (33).

— Si  $K(Y)/K$  est du troisième type, on peut supposer par densité que  $u \in K[Y^{1/p}]$ . Pour tout  $\omega \in K$  écrivons

$$u = \sum_{i \geq 0} a_i(\omega)(Y^{1/p} - \omega)^i \quad \text{où} \quad a_i(\omega) \in K. \quad (34)$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\alpha_0 = \sum_{i > 0} \sum_{0 \leq j < i/p} a_i(\omega) \binom{i}{jp} (-1)^{i-jp} \omega^{i-pj} Y^j. \quad (35)$$

On a  $\alpha_0 \in K[Y]$ , écrivons  $\alpha_0 = \alpha_0(Y)$  et soit  $r > r_Y$  tel que le polynôme  $\alpha_0(Y)$  soit sans zéro dans  $D(Y, r) = \{z \in \overline{K(Y)} / |Y - z| \leq r\}$ . D'après (5) on a pour tout  $\omega' \in D(Y, r)$

$$|\alpha_0(Y)| = |\alpha_0(\omega')|.$$

Soit  $\omega \in K$  tel que  $\omega^p \in D(Y, r)$ , la formule (35) implique donc que

$$|\alpha_0| = |\alpha_0(\omega^p)| = \left| \sum_{i > 0} \sum_{0 \leq j < i/p} a_i(\omega) \binom{i}{jp} (-1)^{i-jp} \omega^i \right|. \quad (36)$$

D'autre part on a pour tout  $i \geq 0$

$$\left| \sum_{0 \leq j < i/p} \binom{i}{jp} (-1)^{jp} \right| \leq \min\{1, |p|^{i/(p-1)-1}\}. \quad (36')$$

En effet puisque  $K$  est de caractéristique nulle soit  $\zeta \in K$  une racine  $p$ -ième de l'unité,  $\zeta \neq 1$ ; on a pour tout  $l = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} (1 - \zeta^l)^i &= \sum_{0 \leq k < i} (-1)^k \binom{i}{k} \zeta^{lk} \\ &= \sum_{0 \leq r < p-1} (-1)^r \left( \sum_{\substack{0 \leq j < i/p \\ jp+r < i}} \binom{i}{jp+r} (-1)^{jp} \right) \zeta^{lr} \end{aligned}$$

donc  $\sum_{l=0}^{p-1} (1 - \zeta^l)^i = p \sum_{0 \leq j < i/p} \binom{i}{jp} (-1)^{jp}$ , d'où la formule (36').

Choisissons  $\omega \in K$  vérifiant les hypothèses précédentes et tel que de plus  $|\omega| = |Y|^{1/p}$ , les formules (36) et (36') impliquent alors

$$|\alpha_0| \leq \max_{i > 0} \{|a_i(\omega)| |Y|^{i/p} \min(1, |p|^{i/(p-1)-1})\}. \quad (37)$$

Soit  $u(Z) = \sum_{i > 0} a_i(\omega)(Z - \omega)^i \in K[Z]$ . L'extension  $K(Y^{1/p})/K$  étant du troisième type, il existe  $r > r_{Y^{1/p}}$  tel que  $u(Z)$  n'ait pas de zéro dans  $D(Y^{1/p}, r) = \{z \in \overline{K(Y)} / |z - Y^{1/p}| \leq r\}$ . Soit  $\omega \in D(Y^{1/p}, r) \cap K$  (tel que de plus  $|\omega| = |Y|^{1/p}$ ), les formules (4), (5) et (34) montrent que

$$|u| = |\alpha_0(\omega)| > |a_i(\omega)| |Y^{1/p} - \omega|^i \quad \text{pour tout } i \geq 1$$

donc, avec le lemme 9

$$|u| = |a_0(\omega)| > |a_i(\omega)| r_{Y^{1/p}}^i = |a_i(\omega)| r_Y^{i/p} \quad \text{pour tout } i \geq 1. \quad (38)$$

Il suit alors de (37) et (38)

$$|\alpha_0| \leq |u| \max_{i \geq 0} \left\{ \left( \frac{|Y|}{r_Y} \right)^{i/p} \min(1, |p|^{i/(p-1)-1}) \right\}$$

donc, puisque  $Y$  vérifie (C)

$$|\alpha_0| \leq |u| \left( \frac{r_Y}{|Y|} \right)^{-(p-1)/p} = c_0 |u|$$

et cette formule appliquée à  $uY^{-k/p}$  montre que  $|\alpha_k| |Y|^{k/p} \leq c_0 |u|$ ; par conséquent (33) est démontrée.

La formule (33) montre que  $(Y^{i/p})_{0 \leq i \leq p-1}$  est une  $c_0$ -base de  $K_{1,Y}$  sur  $K_{0,Y}$  (paragraphe 2.2). La base duale de  $(Y^{i/p})_{0 \leq i \leq p-1}$  (pour la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto \text{Tr}_{K_{1,Y}/K_{0,Y}}(xy)$ ) étant  $((1/p) Y^{-i/p})_{0 \leq i \leq p-1}$ , il en résulte (31) pour  $n = 0$ . La formule (32) est une conséquence immédiate de (31).

LEMME 13. *Les notations sont celles du lemme 12. Alors le corps  $K_{\infty,Y}$  est hyperparfait.*

*Démonstration.* Si  $K$  est de caractéristique positive,  $K_{\infty,Y}$  est parfait. Supposons donc  $K$  de caractéristique nulle. Soit  $P(Y^{p-n}) = \sum a_i Y^{i/p^n} \in K[Y^{p-n}]$ . Si  $K(Y)/K$  n'est pas du troisième type,  $(Y^{i/p^{n+1}})_{i \geq 0}$  est une 1-base de  $K[Y^{p^{-(n+1)}}]$  (puisque en particulier  $Y^{p^{-(n+1)}}$  vérifie (C)), donc

$$|P(Y^{p-n}) - \tilde{P}(Y^{p^{-(n+1)}})^p| \leq |p| |P(Y^{p-n})| \quad \text{où } \tilde{P}(Y^{p^{-(n+1)}}) = \sum a_i^{1/p} Y^{i/p^{n+1}}.$$

Si  $K(Y)/K$  est du troisième type, il en est de même de  $K(Y^{p-n})/K$ . Soit  $r > r_{Y^{p-n}}$  tel que le polynôme  $P(Z)$  n'ait pas de zéro dans

$$D(Y^{p-n}, r) = \{z \in \widehat{K(Y^{p-n})} / |Y^{p-n} - z| \leq r\},$$

soit  $\omega \in D(Y^{p-n}, r) \cap K$  et écrivons  $P(Y^{p-n}) = \sum a_i(\omega)(Y^{p-n} - \omega)^i$ ; soit  $\tilde{P}(Z) = \sum a_i(\omega)^{1/p} (Z - \omega^{p^{-1}})^i$ , un calcul facile montre que pour tout  $i \in \mathbb{N}$

$$|(Y^{p-n} - \omega)^i - (Y^{p^{-(n+1)}} - \omega^{p^{-1}})^{ip}| \leq |p| \frac{|Y^{p-n}|}{r_{Y^{p-n}}} |Y^{p-n} - \omega|^i$$

dont il résulte avec (4)

$$|P(Y^{p-n}) - \tilde{P}(Y^{p^{-(n+1)}})^p| \leq \frac{|p| |Y^{p-n}|}{r_{Y^{p-n}}} |P(Y^{p-n})|.$$

Or d'après le lemme 9

$$\frac{|Y|^{p-n}}{r_{Y^{p-n}}} = \left(\frac{|Y|}{r_Y}\right)^{p-n} \leq \frac{|Y|}{r_Y}.$$

Finalement, quel que soit la nature de l'extension  $K(Y)/K$ , on a

$$|P(Y^{p-n}) - \tilde{P}(Y^{p-(n+1)})^p| \leq \frac{|p||Y|}{r_Y} |P(Y)|.$$

En appliquant ceci aux numérateurs et dénominateurs des éléments de  $K(Y^{p-n})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et compte tenu de  $|p||Y|/r_Y < 1$  (d'après (C)), il en résulte que  $K_{\infty, Y} = \bigcup_{n \geq 0} K(Y^{p-n})^\wedge$  est hyperparfait.

### 3.2.3. Fin de la démonstration du théorème 2

Soit  $(a_n)$  une suite d'éléments de  $K$  vérifiant (22), (23) et (27). Soient  $L_{\infty, X}$  le corps du lemme 10 et  $Y$  défini dans le lemme 11. Supposons

$$\overline{\widehat{K(X)}} = \overline{\widehat{K(Y)}}. \quad (39)$$

On a  $K_{\infty, Y} \subset (L_{\infty, X})^\wedge \subset (K_{\infty, Y})^\wedge$ , donc il existe une extension algébrique  $M$  de  $K_{\infty, Y}$  telle que  $(L_{\infty, X})^\wedge = \widehat{M}$  [4; 6, théorème 2]. Le corps  $K_{\infty, Y}$  étant hyperparfait (lemme 13), la proposition 2 implique que  $|\mathcal{D}_{M/K_{\infty, Y}}| = 1$ , donc, le corps  $M$  est hyperparfait (d'après le lemme 4 en caractéristique 0, sinon  $M$  est parfait car il contient  $K_{\infty, Y}$ ). Comme  $\widehat{M} = (L_{\infty, X})^\wedge$ , il en résulte que le corps  $(L_{\infty, X})^\wedge$  est hyperparfait.

Si la caractéristique de  $K$  est positive: le lemme 10 dit que  $L_{\infty, X}$  est une extension algébrique séparable de  $K(X)^\wedge$  de différente non nulle et le corps  $(L_{\infty, X})^\wedge$  est parfait (car hyperparfait); ainsi le lemme 6 implique que  $K(X)^\wedge$  est parfait, ce qui est faux comme le montre le lemme 8 appliqué au polynôme  $Z^p - X$ . La relation (39) n'est donc pas vraie.

Si la caractéristique de  $K$  est nulle, le lemme 12 (appliqué à  $K(X)$ ) et le lemme 10 disent que

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_{K_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| &= 0 \\ |\mathcal{D}_{L_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| &= 1 \end{aligned} \quad (40)$$

d'autre part, en considérant les extensions de corps  $K(X)^\wedge \subset L_{\infty, X} \subset L_{\infty, X}K_{\infty, X}$  d'une part et  $K(X)^\wedge \subset K_{\infty, X} \subset L_{\infty, X}K_{\infty, X}$  d'autre part, on a

$$|\mathcal{D}_{L_{\infty, X}K_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| = |\mathcal{D}_{L_{\infty, X}K_{\infty, X}/L_{\infty, X}}| \cdot |\mathcal{D}_{L_{\infty, X}/K(X)^\wedge}|$$

et

$$|\mathcal{D}_{L_{\infty, X}K_{\infty, X}/K(X)^\wedge}| = |\mathcal{D}_{L_{\infty, X}K_{\infty, X}/K_{\infty, X}}| \cdot |\mathcal{D}_{K_{\infty, X}/K(X)^\wedge}|$$

qui donne avec (40)

$$|\mathcal{D}_{L_{\infty,X}K_{\infty,X}/L_{\infty,X}}| = 0$$

d'où, avec le lemme 7 appliqué à  $L = L_{\infty,X}$  et aux extensions finies de  $L_{\infty,X}$  contenues dans  $L_{\infty,X}K_{\infty,X}$

$$|\mathcal{D}_{(L_{\infty,X})^{\wedge}K_{\infty,X}/(L_{\infty,X})^{\wedge}}| = 0. \tag{41}$$

D'autre part, le corps  $(L_{\infty,X})^{\wedge}$  étant hyperparfait, la proposition 2 montre que

$$|\mathcal{D}_{(L_{\infty,X})^{\wedge}/(L_{\infty,X})^{\wedge}}| = 1. \tag{42}$$

Or  $(L_{\infty,X})^{\wedge} \supset (L_{\infty,X})^{\wedge} \cdot K_{\infty,X}$ , les formules (41) et (42) sont donc contradictoires, l'hypothèse (39) est par conséquent fausse.

On a prouvé que  $|Y - X| < r_X$  (d'après (28)). La relation  $|Y - X| < r_X$  implique que  $K(Y)$  et  $K(X)$  sont isométriquement isomorphes par l'application qui à une fraction rationnelle  $f(Y)$  associe  $f(X)$ ; donc il existe un isomorphisme isométrique  $\varphi$  de  $\widehat{K(Y)}$  sur  $\widehat{K(X)}$ , on a

$$K \subsetneq \varphi^{-1}(\widehat{K(Y)}) \subsetneq \widehat{K(Y)} \subsetneq \widehat{K(X)}.$$

On peut recommencer ce raisonnement avec  $\varphi^{-1}(\widehat{K(Y)}) = \widehat{K(\varphi^{-1}(Y))} \subset \widehat{K(Y)} \dots$ . Ceci termine le théorème 2 lorsque la valeur absolue de  $K$  n'est pas triviale. Ce sont les valeurs absolues du 3<sup>ème</sup> type (qui ne peuvent être triviales sur  $K$ ) qui ont obligé à cette restriction. Cependant, une variante des raisonnements précédents (la suite  $(a_n)$  des lemmes 10 et 11 est alors formée d'éléments de  $K(X) \dots$ ) permet d'obtenir simplement le théorème 2 lorsque  $K$  est trivialement valué.

*Remarque 1.* Cette démonstration donne une construction explicite d'un élément  $Y$  de  $\widehat{K(X)}$  tel que  $\widehat{K} \subsetneq \widehat{K(Y)} \subsetneq \widehat{K(X)}$ .

*Remarque 2.* Soient  $p$  un nombre premier et  $\mathbb{F}_p((X))$  le corps local de caractéristique  $p$  admettant le corps  $\mathbb{F}_p$  à  $p$  éléments pour corps résiduel, le théorème 2 montre que  $\widehat{\mathbb{F}_p((X))}$  contient une infinité de sous-corps fermés algébriquement clos.

#### 4. LE GROUPE DES $K$ -AUTOMORPHISMES CONTINUS DE $\widehat{K(X)}$

Soient  $K$  un corps valué complet,  $\widehat{K(X)}$  une extension transcendante valuée de  $\widehat{K}$  et  $\Phi$  l'application du groupe  $\text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/K)$  des  $K$ -automorphismes continus de  $\widehat{K(X)}$  dans le groupe  $\text{Aut}(\widehat{K}/K)$  des  $K$ -automorphismes de  $\widehat{K}$  qui à  $\sigma \in \text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/K)$  associe sa restriction à  $\widehat{K}$ . Dans [7] et [8] nous

avons étudié l'image de  $\Phi$ ; les résultats des paragraphes 2 et 3 nous permettent d'en préciser le noyau. Soit  $\sigma \in \text{Ker } \Phi = \text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/\widehat{K})$  (le groupe des  $\widehat{K}$ -automorphismes continus de  $\widehat{K(X)}$ ), on a  $\sigma(X) \notin \widehat{K}$ ,  $|\sigma(X)| = |X|$  et  $|\sigma(X) - X| \leq \inf_{x \in \widehat{K}} |X - x|$  puisque pour tout  $x \in \widehat{K}$ ,  $|\sigma(X) - x| = |\sigma(X - x)| = |X - x|$  (car  $\sigma$  est une isométrie puisque continu). Donc à un élément  $\sigma$  de  $\text{ker } \Phi = \text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/\widehat{K})$  on peut associer l'élément  $\sigma(X)$  de  $\Delta_X$ , l'ensemble des  $Y \in \widehat{K(X)}$  tels que  $Y \notin \widehat{K}$ ,  $|Y| = |X|$  et  $|X - Y| \leq \inf_{x \in \widehat{K}} |X - x|$ . On est donc amené à étudier l'orbite de  $X$  par le groupe  $\text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/\widehat{K})$ .

**PROPOSITION 3.** Soient  $K$  un corps valué complet,  $\widehat{K(X)}$  une extension transcendante valuée de  $\widehat{K}$ ,  $r_X = \inf_{x \in \widehat{K}} |X - x|$ ,  $\Delta_X = \{Y \in \widehat{K(X)} / Y \notin \widehat{K}, |Y| = |X|, |X - Y| \leq r_X\}$  et  $G = \text{Aut}_{\text{cont}}(\widehat{K(X)}/\widehat{K})$  le groupe des  $\widehat{K}$ -automorphismes continus de  $\widehat{K(X)}$ . Alors

(1) si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, l'orbite de  $X$  par  $G$  est  $\Delta_X$ ,

(2) si la caractéristique résiduelle de  $K$  est non nulle, l'orbite de  $X$  par  $G$  est contenue et dense dans  $\Delta_X$  mais distincte de  $\Delta_X$ .

*Démonstration de la proposition 3.* Soit  $\sigma \in G$ , on a  $\sigma(X) \in \Delta_X$  et  $\widehat{K(X)} = \widehat{K}(\sigma(X))$ . Inversement, soit  $Y \in \Delta_X$ , alors l'application de  $K(X)$  dans  $K(Y)$  qui à une fraction rationnelle  $f(X)$  associe  $f(Y)$  induit un  $\widehat{K}$ -isomorphisme isométrique de  $\widehat{K(X)}$  sur  $\widehat{K(Y)}$ , c'est-à-dire un  $\widehat{K}$ -endomorphisme continu de  $\widehat{K(X)}$ , qui est un isomorphisme si et seulement si  $\widehat{K(Y)} = \widehat{K(X)}$ . Le théorème 1 (resp. le théorème 2) montre donc que l'orbite de  $X$  par  $G$  est  $\Delta_X$  (resp. est différente de  $\Delta_X$ ) si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle (resp. non nulle). L'ensemble  $\Delta_X \cap \widehat{K(X)}$  est dense dans  $\Delta_X$  et pour  $Y \in \Delta_X \cap \widehat{K(X)}$  on a  $\widehat{K(Y)} = \widehat{K(X)}$ , donc l'orbite de  $X$  par  $G$  est dense dans  $\Delta_X$ .

*Remarque.* Soient  $D(X, r_X)$  (resp.  $D(X, r_X^-)$ ) l'ensemble des éléments  $z$  de  $\widehat{K(X)}$  tels que  $|X - z| \leq r_X$  (resp.  $|X - z| < r_X$ ). Alors on a  $D(X, r_X^-) \subset \Delta_X \subset D(X, r_X)$ . Si la valuation de  $K$  est du 3<sup>ème</sup> type, on a  $\Delta_X = D(X, r_X)$ .

#### REMERCIEMENT

Nous remercions Jean Fresnel pour son aide et ses encouragements.



## RÉFÉRENCES

1. J. AX, Zeros of polynomials over local fields, the Galois action, *J. Algebra* **15** (1970), 417–428.
2. N. BOURBAKI, “Algèbre commutative,” chap. 6, Hermann, Paris, 1964.
3. B. DWORK, On the zeta function of a hypersurface, *Publ. Math. I.H.E.S.* **12** (1962).
4. J. FRESNEL ET B. DE MATHAN, Algèbres  $L^1$ - $p$ -adiques, *Bull. Soc. Math. France* **106** (1978), 225–260.
5. J. FRESNEL ET M. MATIGNON, Produit tensoriel topologique de corps valués, *Canad. J. Math.* **35** (2)(1983), 218–273.
6. M. MATIGNON, Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local, *C.R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), 1051–1054; et thèse de troisième cycle, Bordeaux, 1979.
7. M. MATIGNON ET M. REVERSAT, Sur les automorphismes continus d'extensions transcendentes valuées, *J. Reine Angew. Math.* **338** (1983), 195–215.
8. M. MATIGNON ET M. REVERSAT, “Ordre de transcendance et prolongement des automorphismes,” Thèse d'État (M. Reversat), Bordeaux, 1982.
9. M. MATIGNON ET M. REVERSAT, Genre topologique de corps valués, à paraître.
10. A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, *Math. Z.* **39** (1935), 269–404.
11. M. VAN DER PUT, Continuous derivations of valued fields, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 71–112.
12. O. SCHILLING, “The Theory of Valuations,” Math. Surveys IV, New York, 1950.
13. S. SEN, On automorphisms of local fields, *Ann. of Math.* **90** (1969), 33–40.
14. J.-P. SERRE, “Corps locaux,” 2ème éd., Hermann, Paris, 1968.
15. J. TATE,  $p$ -Divisible groups, in “Proceedings, Conference on Local Fields, Driebergen,” pp. 158–183, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1967.