4. CONTRE-EXEMPLES EN TOUS GENRES AU PROBLEME DE SKOLEM.

Disons préalablement que les idées essentielles de ce paragraphe sont dues à Michel Raynaud et qu'elles nous ont parfois été aimablement commentées par Laurent Moret-Bailly.

Dans les paragraphes 4.1, 4.2, $k=\mathbb{C}$ est le corps des
(1) nombres complexes, $K=\mathbb{C}(t)$ est le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$.

Soit C l'unique courbe projective non-singulière, intègre sur K dont le corps des fonctions rationnelles est $K(x,y)$
(2) avec $y^2=(x-1)(x^2-t^2)\dots(x^2-t^{2g})$ où $g\geqslant 1$; c'est une courbe hyperelliptique de genre g.

Le but du paragraphe 4.2 est de montrer que pour un choix convenable d'une valeur absolue $|.|'$ sur K triviale sur k (i.e. $|\lambda|'=1$ pour $\lambda\in k^{\times}$) que $\{(K,|.|');C\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem.

Expliquons le schéma de la démonstration. Soit J la jacobienne de C, il faut d'abord montrer que le groupe J(K) est de type fini, donc dénombrable (proposition 2, §4.1.2). Ensuite on considère un schéma $\mathscr{C}$ sur R' (l'anneau de valuation de $(K,|.|')$) dont la fibre générique $\mathscr{C}_K$ est C et la fibre spéciale $\mathscr{C}_k$ est une courbe non-singulière de genre g (hyperelliptique), il existe alors une jacobienne $\mathscr{J}$ de $\mathscr{C}$ dont la fibre générique $\mathscr{J}_K$ est J est dont la fibre spéciale $\mathscr{J}_k$ est la jacobienne de $\mathscr{C}_k$. Comme $\mathscr{J}_k(k)$ n'est pas dénombrable on montre qu'il existe un point fermé a de $\mathscr{C}_k$ qui n'est spécialisation d'aucun point fermé de $\mathscr{C}_K=C$. C'est ce point qui permet de montrer que $\{(K,|.|');C\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem.

4.1. LE GROUPE DES POINTS RATIONNELS DE LA JACOBIENNE J DE LA COURBE C.

(3) Dans ce paragraphe 4.1, R est l'anneau $\mathbb{C}[t]_{t\mathbb{C}[t]}$, i.e. la localisation de $\mathbb{C}[t]$ en $t\mathbb{C}[t]$.

L'idée est de construire un modèle minimal $\mathfrak{X}$ sur R pour la courbe C, cela permet d'identifier la composante neutre du modèle de Néron $\mathscr{J}$ de J à la composante neutre du schéma de Picard

$\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$. Comme la fibre spéciale $\mathfrak{X}_k$ est une chaîne de droites projectives qui se coupent en des points doubles ordinaires, il est facile d'en déduire que $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}_k)\simeq \mathbb{G}_m^g$ (puissance du groupe multiplicatif). Cela permet alors de montrer que la $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}$-trace de J est nulle et l'on peut appliquer le théorème de Lang et Néron.

4.1.1. UN MODELE MINIMAL POUR C.

PROPOSITION 9. *Soient* K,R,k *définis selon (1),(3),* $g\geq 1$ *un entier,*

$$A=\frac{R[X_0,\dots,X_{g+1},Y_0,\dots,Y_{g+1}]}{\mathfrak{A}}=R[x_0,\dots,x_{g+1},y_0,\dots,y_{g+1}],\ \text{où}$$

x_i (resp. y_i) *est l'image canonique de* X_i (resp. Y_i). *L'algèbre* $R[X,Y]$ *est graduée par* $\deg R=0$, $\deg X_i=1$, $\deg Y_i=g+1$ *et l'idéal homogène* $\mathfrak{A}$ *est engendré par les polynômes qui suivent :*

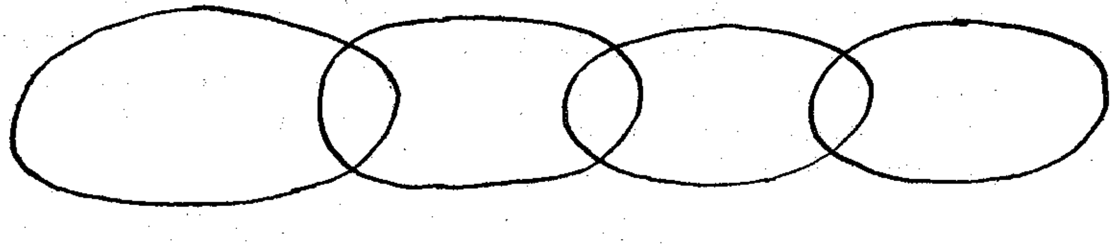
$X_iX_j-t^{j-i-1}X_{j-1}X_{i+1}$ *pour* $j>i+1$, $Y_iX_j^g-Y_jX_i^g$ *pour tout* i,j ;

$$Y_i^2-X_i(t^{i-1}X_{i-1}-X_i)((t^{i-2}X_i)^2-X_i^2)\dots(X_{i-1}^2-X_i^2)(X_i^2-X_{i+1}^2)\dots$$
$$\dots.(X_i^2-(t^{g-i}X_{i+1})^2)$$

$$Y_0^2-X_1(X_0-X_1)(X_0^2-(tX_1)^2)\dots(X_0^2-(t^gX_1)^2),$$
$$Y_1^2-X_1(X_0-X_1)(X_1^2-X_2^2)(X_1^2-(tX_2)^2)\dots(X_1^2-(t^{g-1}X_2)^2)$$
$$Y_{g+1}^2-X_{g+1}(t^gX_g-X_{g+1})((t^{g-1}X_g)^2-X_{g+1}^2)\dots(X_g^2-X_{g+1}^2).$$

Soient $\mathfrak{X}\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Proj}\,A$, $S=\mathrm{Spec}(R)$, $f:\mathfrak{X}\to S$, *le morphisme canonique. Le morphisme* f *est projectif et plat, la fibre générique* $\mathfrak{X}_K$ *de* $\mathfrak{X}$ *est la courbe* C *(définie en (2)), la fibre spéciale* $\mathfrak{X}_k$ *de* $\mathfrak{X}$ *est un schéma réduit, c'est une chaîne de* $g+1$ *droites projectives,* $Z_1,Z_2,\dots,Z_{g+1}$ *où* $Z_i\cap Z_{i+1}$ *est constitué de 2 points doubles ordinaires dans* $\mathfrak{X}_k$ *(et où* $Z_i\cap Z_j=\emptyset$ *si* $|i-j|\neq 1$*).*

Enfin $\mathfrak{X}$ *est un schéma régulier et c'est un modèle minimal de* $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$*, le corps des fonctions de* $\mathfrak{X}$.



"une chaîne de g+1 droites"

DEMONSTRATION. On a $\mathscr{X}=D_+(x_0)\cup D_+(x_1)\cup\ldots\cup D_+(x_{g+1})$, $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}(D_+(x_0))=$ $=R[\frac{x_1}{x_0},\frac{y_1}{x_0^{g+1}}]$, $O_{\mathscr{X}}(D_+(x_i))=R[\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\frac{y_i}{x_i^{g+1}}]$ pour $1\leqslant i\leqslant g$, $O_{\mathscr{X}}(D_+(x_{g+1}))=$ $=R[\frac{x_g}{x_{g+1}},\frac{y_{g+1}}{x_{g+1}^{g+1}}]$. Il suit que f est plat, $\mathscr{X}$ régulier et que $\mathscr{X}_K\simeq C$. On a $\mathscr{X}_k=V(tA)=Z_1\cup\ldots\cup Z_{g+1}$ où $Z_i=V((t,x_0,\ldots,x_{i-2},x_{i+1},\ldots,x_{g+1}))$, $1\leqslant i\leqslant g+1$, $Z_0=V((t,x_k,\ldots,x_{g+1}))$, $Z_{g+1}=V((t,x_0,x_1,\ldots,x_{g-1}))$. Il est facile de montrer que $\mathscr{X}_k$ est réduit, que $Z_i\simeq\mathbb{P}^1_k$, que $Z_i\cap Z_{i+1}$ est constitué de 2 points doubles ordinaires et que $Z_i\cap Z_j=\phi$ si $|i-j|\neq 1$.

Il reste à montrer que $\mathscr{X}$ est un modèle minimal. Pour cela on applique le critère de Castelnuovo ([Ch], theorem 3.1, p.315), en calculant $i_k(Z_i,Z_i)$ la "self-intersection" de Z_i. D'abord on montre que $i_k(Z_i,V(tA))=0$; en effet le diviseur V(tA) correspond au faisceau inversible $\mathscr{L}=(tA)^{\sim}$, ce faisceau est donc isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$ (parce que $\mathscr{X}$ est plat sur R). Il suit que $\mathscr{L}^{-1}\otimes\mathcal{O}_{Z_i}\simeq\mathcal{O}_{Z_i}$, donc est de degré zéro. Ensuite par linéarité on a $i_k(Z_i,V(tA))=$ $i_k(Z_i,Z_1)+\ldots+i_k(Z_i,Z_{g+1})$. Si $|i-j|\neq 1,0$ on a $Z_i\cap Z_j=\phi$, ainsi $i_k(Z_i,Z_j)=0$, si $j=i+1$ ou $i-1$ on a $i_k(Z_i,Z_j)=2$ puisque Z_i et Z_j se coupent en 2 points doubles ordinaires. Il suit donc que $i_k(Z_i,Z_i)=-2$ ou -4. Ainsi $\mathscr{X}$ ne possède pas de diviseurs premiers exceptionnels ([Ch], theorem 3.1, p.315) et comme $H^1(\mathscr{X}_K,\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K})=g\neq 0$, le schéma $\mathscr{X}$ est un modèle minimal de $\mathscr{K}(\mathscr{X})$ ([Ch], theorem 1.2, p.310).

4.1.2. LE GROUPE J(K) EST DE TYPE FINI.

PROPOSITION 10. *Soient* K *défini selon (1),* C *défini selon (2),* J *la variété abélienne, jacobienne de* C. *Alors le groupe* J(K) *des points de* J *rationnels sur* K *est de type fini.*

DEMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème de Lang et Néron ([La], theorem 2, p.139), i.e. de montrer que la $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}$ trace de J est le groupe réduit à l'élément neutre.

Soient $\mathscr{X}$ le modèle minimal de C défini par la proposition 1, $\mathscr{J}$ le modèle de Néron de J sur S=Spec R ([Ar], theorem 1.2, p.214), alors $\mathscr{J}^0$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{P}ic(\mathscr{X}/S)^0$ où le "0" signifie composante neutre ([Ar], proposition 1.20, p.219), [De], théorème 5.8, p.28).

Soit $\mathscr{A}$ une variété abélienne sur k, alors $\mathscr{A}_{(R)}$ est un schéma abélien, c'est donc le modèle de Néron de $\mathscr{A}_{(K)}$ ([Ar], corollary 1.4, p.215). Supposons que $\mathcal{A}_{(K)}$ soit une sous-variété abélienne de J ; comme k est de caractéristique zéro, on sait que le modèle de Néron de $\mathcal{A}_{(K)}$ est un sous-schéma fermé du modèle de Néron de J([B.L.R]). Comme $\mathcal{A}_{(K)}$ est connexe il suit que $\mathcal{A}_{(R)}$ est un sous-schéma fermé de $\mathcal{J}^0$, donc de $\mathcal{P}ic(\mathcal{X})$. Ainsi donc $(\mathcal{A}_{(R)})_k$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{P}ic(\mathcal{X})_k=\mathcal{P}ic(\mathcal{X}_k)$. Comme $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}_k)^0\simeq G_m^g$ (voir ci-après) est affine, comme $(\mathcal{A}_{(R)})_k\simeq\mathcal{A}$ est projectif, on a dim $\mathcal{A}=0$; ainsi $\mathcal{A}$ qui est connexe est réduit à l'élément neutre.

Il nous reste à montrer que $\mathcal{P}ic(\mathcal{X}_k)^0\simeq G_m^g$. Soit $\ell\supset k$ un corps, $Y=(\mathcal{X}_k)_{(\ell)}$, $Y'\xrightarrow{\pi}Y$ sa normalisation. On a la suite exacte $0\to\mathcal{O}_Y^\times\to\pi_*\mathcal{O}_{Y'}^\times\to\mathcal{F}\to 0$, où $\mathcal{F}=\pi_*\mathcal{O}_{Y'}^\times/\mathcal{O}_Y^\times$. On a donc aussi la suite exacte $0\to\ell^\times\to\ell^{\times g+1}\to\mathcal{F}(Y)\to h^1(Y,\mathcal{O}_Y^\times)\to H^1(Y',\mathcal{O}_{Y'}^\times)\to 0$ donc une suite exacte $0\to G_m(\ell)\to G_m^{g+1}(\ell)\to G_m^{2g}(\ell)\to\mathcal{P}ic^0(\mathcal{X}_k)(\ell)\to 0$. Ceci montre en utilisant ([Mi2], theorem 7.3, p.191) que $G_m^g\simeq\mathcal{P}ic^0(\mathcal{X}_k)$.

4.2. LA COURBE HYPERELLIPTIQUE C NE SATISFAIT PAS LA PROPRIETE DE SKOLEM.

4.2.1. LE RESULTAT PRINCIPAL.

LEMME 4. *Soient* K,k *définis selon (1),* C *selon (2). Alors il existe une valeur absolue* $|.|'$ *sur* K *triviale sur* $\mathbb{C}$ *dont* R' *est l'anneau de valuation et il existe un schéma* $\mathcal{C}$ *sur* S=Spec R', *plat, lisse, projectif, en particulier* $\mathcal{C}$ *est régulier et on a* $\mathcal{C}(R')\neq\emptyset$. *En plus* $\mathcal{C}_K$ (resp. $\mathcal{C}_k$) *la fibre générique* (resp. *spéciale) est une courbe sur* K (resp.k) *géométriquement intègre et géométriquement régulière de genre* g *et on a* $\mathcal{C}_K\simeq C$, $K=H^0(\mathcal{C}_K,\mathcal{O}_{\mathcal{C}_K})$.

DEMONSTRATION. Il est élémentaire de montrer que C est géométriquement intègre et régulier ; que $K=K^{alg}\cap K(x,y)$ où $y^2=(x-1)(x^2-t^2)\ldots(x^2-t^{2g})$, ainsi $K=H^0(C,\mathcal{O}_C)$. Il existe une algèbre graduée de type fini intègre $K[x_0,\ldots,x_n]$ avec $C=\mathrm{Proj}(K[x_0,\ldots,x_n])$. Soient $A=\mathbb{C}[t]$, $\mathfrak{A}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $A[X_0,\ldots,X_n]\to K[x_0,\ldots,x_n]$. Soient $A[x]=A[X]/\mathfrak{A}$, alors $K[x]=A[x]\otimes_A K$ et $A[x]$ est sans torsion sur A. Soient $\mathcal{X}=\mathrm{Proj}(A[x])$, $f:\mathcal{X}\to\mathrm{Spec}\,A$ le morphisme canonique, il est plat. Comme $\mathcal{X}_K$, la fibre générique, est géométriquement intègre et régulière, il existe un ouvert $U\subset\mathrm{Spec}\,A$ tel que $\mathcal{X}_t$ soit géométriquement intègre pour $t\in U$ ([Gro], th 9.7.7, p. 79 ch IV 3° partie n°28) et que $\mathcal{X}_t$ soit géométriquement régulier ([Gro], th 12.2.4, p. 183, ch IV, 3ème partie n°28).

Soient $u \in U$ un point fermé, $R' = \mathcal{O}_{U,u}$, $\mathcal{C} = f^{-1}(U) \times_{U} \operatorname{Spec} R'$, on a donc $\mathcal{C} = \operatorname{Proj}\left(\dfrac{R'[X]}{\mathfrak{A}R'[X]}\right)$ et $\mathcal{C}_K = \mathcal{X}_K = C$; bien entendu R' est l'anneau de valuation d'une valeur absolue $|.|'$ définie sur K et triviale sur $\mathbb{C}$. Comme $\chi(\mathcal{C}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_K}) = \chi(\mathcal{C}_k, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_k})$ (caractéristique d'Euler-Poincaré), comme $K = H^0(\mathcal{C}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_K})$, $k = H^0(\mathcal{C}_k, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_k})$ on a $\dim_K H^1(\mathcal{C}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_K}) = \dim_k H^1(\mathcal{C}_k, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_k}) = g$. Comme $\mathcal{C}_K(K) = C(K) \neq \emptyset$ on a facilement $\mathcal{C}(R') \neq \emptyset$.

PROPOSITION 11. *Soient* $\mathcal{C}$ *sur* $S = \operatorname{Spec} R'$ *le schéma défini par le lemme 4,* $\mathcal{C}_K$ *(resp* $\mathcal{C}_k$*) la fibre générique (resp spéciale) de* $\mathcal{C}$*. Alors il existe un point fermé* $a \in \mathcal{C}_k$ *tel que* $\{a\} \neq \overline{\{y\}} \cap \mathcal{C}_k$ *pour tout point* $y \in \mathcal{C}_K$ *fermé dans* $\mathcal{C}_K$ *(où* $\overline{\{y\}}$ *désigne l'adhérence de* $\{y\}$ *dans* $\mathcal{C}$*).*

DEMONSTRATION. Soit $\mathcal{J}$ la jacobienne de $\mathcal{C}$, c'est un schéma abélien sur S (en particulier propre et lisse) ([Mi2], p. 192,193); de plus $\mathcal{J}_K$ (resp $\mathcal{J}_k$) la fibre générique (resp. spéciale) de $\mathcal{J}$ est la jacobienne de $\mathcal{C}_K$ (resp. $\mathcal{C}_k$).

α) Il existe $a \in \mathcal{C}_k(k)$ *tel que le diviseur* $a - e_k$ *sur* $\mathcal{C}_k$ *possède la propriété suivante : pour tout entier* $d \geq 1$ *on a* $d(a - e_k) \notin \bigcup_{z \in \mathcal{J}_K(K)} \overline{\{z\}}$ (e_k est la fibre spéciale d'un élément de $\mathcal{C}(R')$ et $(a - e_k) \in \mathcal{J}_k(k)$ veut dire classe du diviseur $a - e_k$).

Comme $\mathcal{J}_k$ est une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ on a $\mathcal{J}_k(k) \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$ comme groupe ([M], p 2) où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^g$. Il suit que $\mathcal{J}_k(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension non dénombrable. Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une base de $\mathcal{J}_k(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ avec $u_i \in \mathcal{J}_k(k)$. Soit $N = \bigcup_{z \in \mathcal{J}_K(K)} \overline{\{z\}} \cap \mathcal{J}_k$, comme $\mathcal{J}_K(K)$ est dénombrable (proposition 10), il suit du lemme 6 (ci-après) que N est dénombrable. Il suit facilement de cela qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $du_{i_0} \notin N$ pour tout $d \geq 1$.

Comme $\mathcal{J}_k(k)$ est engendré par les classes de diviseurs $\{(x - e_k)\}_{x \in \mathcal{C}_k(k)}$, il existe donc $a \in \mathcal{C}_k(k)$ tel que $d(a - e_k) \notin N$ pour tout $d \geq 1$.

β) *Soit* $a\in\mathscr{C}_k(k)$ *le point défini par* α), *alors pour tout point* $y\in\mathscr{C}_K$ *fermé dans* $\mathscr{C}_K$ *on a* $\{a\}\neq\overline{\{y\}}\cap\mathscr{C}_k$.

Supposons le contraire, i.e qu'il existe $y\in\mathscr{C}_K$ un point fermé dans $\mathscr{C}_K$ avec $\{a\}=\overline{\{y\}}\cap\mathscr{C}_k$.

Comme $\overline{\{y\}}$ est un fermé irréductible de codimension 1 de $\mathscr{C}$ (lemme 2, ci-après), comme $\mathscr{C}$ est un schéma régulier (lemme 4), il existe un faisceau inversible d'idéaux $\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$ tel que $\mathscr{F}_x=\mathscr{O}_{\mathscr{C},x}$ si $x\notin\overline{\{y\}}$, $\mathscr{F}_x\subsetneq\mathscr{O}_{\mathscr{C},x}$ si $x\in\overline{\{y\}}$. Il suit alors que

$\mathscr{F}_K$ est un faisceau inversible d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}_K}$ avec $(\mathscr{F}_K)_z=\mathscr{O}_{\mathscr{C}_K,z}$

si $z\neq y$ et $(\mathscr{F}_K)_y\subsetneq\mathscr{O}_{\mathscr{C}_K,y}$. De même $\mathscr{F}_k$ est un faisceau inversible

d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}_k}$ avec $(\mathscr{F}_k)_x=\mathscr{O}_{\mathscr{C}_k,x}$ si $x\neq a$ et $(\mathscr{F}_k)_a\subsetneq\mathscr{O}_{\mathscr{C}_k,a}$.

Soient $e\in\mathscr{C}(R')$, e_K sa fibre générique, e_k sa fibre spéciale, puisque $\overline{\{e_K\}}\cap\mathscr{C}_k=\{e_k\}$ (lemme 3, ci-après), on peut donc associer aussi à $\overline{\{e_K\}}$ un faisceau inversible d'idéaux $\mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$ avec les mêmes propriétés que ci-dessus.

(4) Il suit de ce qui précède que $\mathscr{F}_k=\mathscr{L}(pa)$, $\mathscr{G}_k=\mathscr{L}(qe_k)$ où $\mathscr{L}(D)$ est le faisceau inversible associé au diviseur D. Ainsi $(\mathscr{F}^{\otimes q}\otimes\mathscr{G}^{\otimes(-p)})_k$ est de degré zéro. Il suit de cela que $(\mathscr{F}^{\otimes q}\otimes\mathscr{G}^{\otimes(-p)})_K$ est aussi de degré zéro ([Mi2], theorem 4.2 b), p. 108).
Posons $\mathscr{M}=\mathscr{F}^{\otimes q}\otimes\mathscr{G}^{\otimes(-p)}$, ainsi $\mathscr{M}\in P^0_{\mathscr{C}}(R)$ ([Mi2], p. 192).

on a le diagramme commutatif ci-après :

$$\begin{array}{ccc} P^0_{\mathscr{C}}(K) & \longrightarrow & \mathscr{J}(K) \\ \uparrow & & \uparrow \\ P^0_{\mathscr{C}}(R') & \longrightarrow & \mathscr{J}(R') \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^0_{\mathscr{C}}(k) & \longrightarrow & \mathscr{J}(k) \end{array}$$

([Mi2], p. 192, 193) dont les flèches horizontales sont bijectives. Ainsi après l'identification que permettent les flèches horizontales l'élément $\mathscr{M}\in\mathscr{J}(R')$ a pour image canonique dans $\mathscr{J}(K)$ (resp. $\mathscr{J}(k)$ l'élément $\mathscr{M}_K$ (resp. $\mathscr{M}_k$). Il suit du lemme 6 que $\{\mathscr{M}_k\}=\overline{\{\mathscr{M}_K\}}\cap\mathscr{J}_k$. Par (4) $\mathscr{M}_k$ est le faisceau inversible associé au diviseur $pq(a-e_k)$. Ce qui contredit α), ainsi β) est montré.

4.2.2. LE CONTRE EXEMPLE

THEOREME 3. *Soient* K *le corps valué défini selon le lemme 4, §4.2.1,* C *la courbe hyperelliptique de genre* $g \geq 1$ *définie selon* (2). *Elle est géométriquement intègre et le couple* $\{(K,|.|');C\}$ *ne satisfait pas la propriété de Skolem.*

DEMONSTRATION. Soient toujours $\mathscr{C}=\mathrm{Proj}(R'[x])$ le schéma défini par le lemme 4. On a $C=\mathrm{Proj}(K[x])$, $C_{(\hat{K})}=\mathrm{Proj}(\hat{K}[x])$ où $\hat{K}$ est le complété de K, $K[x]=K\otimes_{R'}R'[x]$, $\hat{K}[x]=\hat{K}\otimes_{K}K[x]$.

Soit r l'application de l'ensemble des points fermés de $C_{(\hat{K})}$ dans l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}_k$ définie comme il suit. Soit $y\in C_{(\hat{K})}$ un point fermé, alors il existe $\beta_0,\beta_1,..,\beta_n\in\hat{K}^{alg}$ avec $1=\max|\beta_i|$ et un homomorphisme $\Phi:\hat{K}[x]\to\hat{K}^{alg}[T]$ défini par $\Phi(x_i)=\beta_i T$ dont le noyau $\ker\Phi$ est l'idéal premier homogène correspondant à y. Cet homomorphisme Φ induit un homomorphisme $\overline{\Phi}:k[x]\to k[T]$ par $\overline{\Phi}(x_i)=\overline{\beta}_i T$, où $k[x]=k\otimes_R R'[x]$. Alors le point associé à l'idéal premier homogène $\ker\overline{\Phi}$ est fermé et se note r(y). On sait que r est surjective ([Fr], p 325).

Soit $a\in\mathscr{C}_k$ le point fermé défini par la proposition 11 : il existe $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\in k$ non tous nuls et un k-homomorphisme $\varphi:k[x]\to k[T]$ tel que $\varphi(x_i)=\alpha_i T$ et que $\ker\varphi$ soit l'idéal premier homogène associé à a. Soit $p\in C_{(\hat{K})}$ un point fermé tel que r(p)=a. Ainsi p correspond au noyau d'un $\hat{K}$-homomorphisme $\Phi:\hat{K}[x]\to\hat{K}^{alg}[T]$ et on a $\Phi(x_i)=\beta_i T$, $1=\max_i|\beta_i|$ et $\overline{\beta}_i=\alpha_i$. On peut donc supposer que $\beta_0=\alpha_0=1$.

Soient $N\geq 1$ un entier tel que $|\beta_i-\alpha_i|^N \leq |t'|$ (on a $k\subset K$) et $f_i \overset{\text{déf}}{=} t'^{-1}(x_i x_0^{-1}-\alpha_i\alpha_0^{-1})^N\in\mathscr{R}(C)$ pour $1\leq i\leq n$ (où $t'R'$ est le maximal de R'). Alors on a $f_i\in\mathscr{O}_{C_{(\hat{K})},p}$ et $|f_i(p)|\leq 1$.

Montrons que $\{(K,|.|');C;f_1,...,f_n\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem.

Soit $y\in C=\mathscr{C}_K$ un point fermé tel que $f_i\in O_{\mathscr{C}_K,y}$ pour

(5) $1\leq i\leq n$ et que $|\sigma(f_i(y))|\leq 1$ pour $1\leq i\leq n$ et pour tout K-homomorphisme

$$\sigma:K(y)=\frac{\mathscr{O}_{C,y}}{\mathfrak{m}_y}\to\hat{K}^{alg}.$$

Il existe donc un K-homomorphisme $\Psi:K[x]\to K^{alg}[T]$ tel que $\ker\Psi$ soit l'idéal premier homogène correspondant à y. On a

$\Psi(x_i)=\gamma_i T$ où $\gamma_i \in K^{alg}$, comme f_i est régulier en y on a $\gamma_0 \neq 0$, on peut donc supposer que $\gamma_0=1$. Ainsi (5) s'écrit

(6) $|(\sigma(\gamma_i)-\alpha_i)^N t'^{-1}| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$.

(7) Ceci implique $|\sigma(\gamma_i)| \leq 1$, pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout K-homomorphisme $\sigma: K(y) \to \hat{K}^{alg}$ (en effet $|\alpha_i| \leq 1$)

Soit $\mathfrak{p}=\ker\Psi$, on a $\overline{\{y\}}=V(\mathfrak{p}\cap R'[x])$. Montrons que $\overline{\{y\}} \cap \mathscr{C}_k=\{a\}$. Un idéal premier homogène $\mathfrak{q}$ appartient à $\overline{\{y\}} \cap \mathscr{C}_k$ si et seulement si $\mathfrak{q} \not\supset \sum x_i R'[x]$ et si $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\cap R'[x]+t'R'[x]$.

On a $\sqrt{\mathfrak{p}\cap R'[x]+t'R'[x]} \underset{\neq}{\subset} \sum x_i R'[x]$. Sinon il existerait $M \geq 1$ avec $x_0^M \in \mathfrak{p}\cap R'[x]+t'R'[x]$, soit $x_0^M=u(x)+t'v(x)$ où $u \in \mathfrak{p}\cap R'[x]$, $v \in R'[x]$. On applique Ψ à cette égalité et on obtient $1=t'v(\gamma_0,\gamma_1,..,\gamma_n)$. Soient $\sigma_1,..,\sigma_s$ les K-homomorphismes distincts de $K(y)=K(\gamma_0,\gamma_1,..,\gamma_n)$ dans $\hat{K}^{alg}$. On a donc $\prod_{i=1}^{s}\sigma_i(v(\gamma_0,..,\gamma_n)) \in K$ et

$|\sigma_i(v(\gamma_0,..,\gamma_n))| \leq 1$ par (7). Ainsi $1=t'^s\prod_{i=1}^{s}\sigma_i(v(\gamma_0,..,\gamma_n))$ implique $1 \in t'^s R$, c'est impossible.

On a donc $\overline{\{y\}} \cap \mathscr{C}_k \neq \emptyset$. Soit donc $\mathfrak{q}$ un premier homogène avec $\mathfrak{p} \cap R'[x]+t'R'[x] \subset \mathfrak{q} \underset{\neq}{\subset} \sum x_i R'[x]$. En utilisant (7) on a

$\prod_{\ell=1}^{s}(x_i\sigma_\ell(\gamma_j)-x_j\sigma_\ell(\gamma_i)) \in \mathfrak{p}\cap R'[x]$. Comme $|\sigma_\ell(\gamma_i)-\alpha_i|<1$ par (6), on a $\prod_{\ell=1}^{s}(x_i\sigma_\ell(\gamma_j)-x_j\sigma_\ell(\gamma_i))-(x_i\alpha_j-x_j\alpha_i)^s=\sum u_\nu x^\nu$ où $u_\nu \in K$ et $|u_\nu|<1$, ainsi $u_\nu \in t'R'$. Il suit que

$\mathfrak{q} \supset \sum_{i,j}(x_i\alpha_j-x_j\alpha_i)R'[x]+t'R'[x]$. Comme $\sum_{i,j}(x_i\alpha_j-x_j\alpha_i)k[x]$ est l'idéal premier homogène de $k[x]$ qui correspond au point a, cela veut dire que $\mathfrak{q}$ correspond au point a. Ainsi donc $\overline{\{y\}} \cap \mathscr{C}_k=\{a\}$. Ce qui est contraire à notre hypothèse sur a (proposition 11).

Il suit de cela que $\{(K,|.|');C;f_1,..,f_n\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem.

LEMME 5. *Soient* K,k *définis selon* (1), R *est un anneau de valuation de* K/k, $\mathscr{C}$ *un schéma plat sur* Spec R *avec* $1=\dim\mathscr{C}_K=\dim\mathscr{C}_k$, $\mathscr{C}_K$ *irréductible,* $z \in \mathscr{C}_K$ *un point fermé dans* $\mathscr{C}_K$. *Alors* $\overline{\{z\}}$ *l'adhérence de* $\{z\}$ *dans* $\mathscr{C}$ *est un fermé irréductible de codimension 1.*

DEMONSTRATION. Soit F un fermé irréductible de $\mathscr{C}$ avec $z\in F$ et $F\neq\mathscr{C}$ (ça existe puisque z est fermé dans $\mathscr{C}_K$). Si $\dim(F\cap\mathscr{C}_K)=1$ on a $F\supset\mathscr{C}_K$ et comme $\mathscr{C}_K$ est ouvert dense de $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ est plat sur Spec R) on aurait $F=\mathscr{C}$, c'est impossible. On a donc $\dim(F\cap\mathscr{C}_K)=0$ et $F\cap\mathscr{C}_K=\{z\}\cup\Phi$ où Φ est fermé dans $\mathscr{C}_K$. Il existe $\Sigma\subset F$ un fermé avec $\Sigma\cap\mathscr{C}_K=\Phi$. Alors $F=\overline{\{z\}}\cup\Sigma\cup(F\cap\mathscr{C}_k)$, comme F est irréductible on a $F=\overline{\{z\}}$ ou $F=\Sigma$ ou $F=(F\cap\mathscr{C}_k)$. La seule possibilité est clairement $F=\overline{\{z\}}$, ce qui montre que $\overline{\{z\}}$ est un fermé irréductible de codimension 1.

LEMME 6. *Soient* K,k *définis selon* (1), R *est un anneau de valuation de* K/k *dont* t_1R *est l'idéal maximal* $f:\mathfrak{X}\to S=\operatorname{Spec} R$ *un morphisme de schéma plat,* $\rho:\operatorname{Spec}K\to\mathfrak{X}$ *un* S*-morphisme,* ξ (*resp.* η) *le point fermé (resp ouvert) de* S, $\mathfrak{X}_K=f^{-1}(\{\eta\})$ (*resp* $\mathfrak{X}_k=f^{-1}(\{\xi\})$) *la fibre générique (resp. spéciale). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Il existe un* S*-morphisme* $\tilde\rho:S\to\mathfrak{X}$ *qui prolonge* ρ,

ii) *on a* $\overline{\{\rho(\eta)\}}\cap\mathfrak{X}_k\neq\emptyset$.

Si de plus $\mathfrak{X}$ *est séparé, on a* card $(\overline{\{\rho(\eta)\}}\cap\mathfrak{X}_k)\leqslant 1$.

DEMONSTRATION. i) implique ii). On a $\tilde\rho(\xi)\in\overline{\{\rho(\eta)\}}$ et $f\cdot\tilde\rho(\xi)=\xi$ ainsi $\tilde\rho(\xi)\in\mathfrak{X}_k$.

ii) implique i)

$$\begin{tikzcd} K & \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\rho(\eta)} \arrow[l, "\rho^{\#}_{\rho(\eta)}"'] \\ & \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x} \arrow[u] & R \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Soit $x\in\overline{\{\rho(\eta)\}}\cap\mathfrak{X}_k$, on a le diagramme ci-contre. Soit $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le maximal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\rho(\eta)}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$), on a $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{p}\cap\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ (c'est $x\in\overline{\{\rho(\eta)\}}$) et $t_1\in\mathfrak{q}$ (c'est $x\in\mathfrak{X}_k$). Montrons que $i\circ\rho^{\#}_{\rho(\eta)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x})=R$. Sinon il existerait $a\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ tel que $t_1^{-1}=i\circ\rho^{\#}_{\rho(\eta)}(a)$, il suit que $1-t_1a\in\ker\rho^{\#}\cap\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$. Or $\mathfrak{p}=\ker\rho^{\#}$, ainsi $1-t_1a\in\mathfrak{p}\cap\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}\subset\mathfrak{q}$ d'où $1\in\mathfrak{p}$, c'est impossible. Ainsi $i\circ\rho^{\#}$ induit un R-homomorphisme local de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ dans R ; le lemme 7, ci-après, montre alors que ρ admet un prolongement.

L'unicité du prolongement résulte du fait que $\mathfrak{X}$ est séparé sur S.

LEMME 7. *Soient* K,k *définis selon (1),* R *un anneau de valuation de* K/k , $\mathfrak{X}$ *un schéma sur* S=Spec R, A *une* R*-algèbre qui est un anneau local,* ξ *le point fermé de* Spec A, ρ : Spec A $\to\mathfrak{X}$ *un* S*-morphisme, alors* $\rho^{\#}_{\xi}:\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\rho(\xi)}\to A$ *est un* R*-homomorphisme local. Réciproquement, soient* $x\in\mathfrak{X}$, $\varphi:\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}\to A$ *un* R*-homomorphisme local, alors il existe un unique* S*-morphisme* ρ : Spec A $\to\mathfrak{X}$ *tel que* $x=\rho(\xi)$ *et* $\varphi=\rho^{\#}_{\xi}$.

REMARQUE 1. *Soient* $L=\mathcal{R}(C)$ *le corps des fonctions de la courbe* C *définie selon (1),* $|.|'$ *la valeur absolue sur* K *définie selon le lemme 4, §4.2.1,* $\mathcal{W}$ *les valeurs absolues* $|.|$ *sur* L *prolongeant* $|.|'$ *et telles que* $(\overline{L,|.|})/(\overline{K,|.|'})$ *soit un corps de fonctions d'une variable. Alors il existe une partie finie, non vide* Ω *de* $\mathcal{W}$ *telle que* $\mathcal{P}_\Omega$ *ne soit pas satisfaite.*

C'est bien entendu le théorème 3 et le théorème 2, §3.4. Soient $\{f_1,f_2,..,f_n\}$ les éléments de L définis dans la démonstration du théorème 3, $U=\{x\in C_{(\hat{K})} \mid f_i\in\mathcal{O}_{C_{(\hat{K})},x}, |f_i(x)|\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant n\}$. Alors la réduction canonique $\overline{U}^c$ de U définit un ensemble fini non vide $\Omega=\{|.|_1,...,|.|_s\}$ d'éléments de $\mathcal{W}$ tel que $|f_i|_j\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant s$ (voir la démonstration, ii) implique i) du théorème 2, §3.4). Montrons qu'il n'existe pas $T\in L$ transcendant sur K et tel que $\{|.|_1,...,|.|_s\}$ soient exactement les prolongements à L de la valeur absolue de Gauss $|.|_g$ sur K(T) associée à $|.|'$ et à T. Supposons le contraire.

Alors f_i est racine d'un polynôme $P_i(Z)$ irréductible sur K(T) avec les propriétés qui suivent

1) $P_i(Z) = u_{i,0}(T) + u_{i,1}(T)Z +...+ u_{i,m_i}(T)Z^{m_i}$ avec $u_{i,j}(T)\in K[T]$

$|u_{i,m_i}(T)|_g=1$, $|u_{i,\ell}(T)|_g\leqslant 1$ (parce que $|f_i|_j\leqslant 1$ pour $1\leqslant j\leqslant s$.)

Par le lemme de Krasner il est facile de montrer qu'il existe $\xi\in K^{alg}$, entier sur R' (l'anneau de valuation de $|.|'$)

2) avec $|u_{i,m_i}(\xi)|=1$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

L'injection $K(T)\hookrightarrow L$ définit un morphisme fini $\rho : C\to\mathbb{P}^1_K$, l'élément ξ définit un point x de $\mathbb{P}^1_K$. Soit $y\in C$ avec $\rho(y)=x$, alors il suit facilement de (1) et (2) que pout tout $z\in C_{(\hat{K})}$ au-dessus de y l'élément $f_i(z)$ est entier sur K^0. Cela contredit bien le fait que $\{(K,|.|')\ ;\ C\ ;\ \mathcal{F}\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem ($\mathcal{F}=\{f_1,f_2,...,f_n\}$).

REMARQUE 2. *Les notions* "Träge" *chez* E. Lamprecht *et* P. Roquette [La2], [Ro1].

Soient $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions d'une variable muni d'une valeur absolue discrète (i.e $|L^\times|\simeq\mathbb{Z}$) tel que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable.

Selon Lamprecht ([La2], $(L/K,|.|)$ satisfait la propriété "Träge" s'il existe $T\in L-K$ avec $|T|=1$, T résiduellement transcendant sur $\overline{K}$ et $[L:K(T)]=[\overline{L}:\overline{K(T)}]$.

Selon Roquette [Ro1], $(L/K,|.|)$ satisfait la propriété "Träge" si pour tout sous-K-espace vectoriel E de L de dimension finie on a $\dim_K E=\dim_{\overline{K}} \overline{E}$.

On peut montrer que "Träge" selon Lamprecht implique "Träge" selon Roquette. En revanche l'autre implication est fausse. En effet, le corps des fonctions $(L/K,|.|_i)$ de la remarque 1 satisfait la propriété Träge selon Roquette et non celle selon Lamprecht.

En revanche si $\{(K,|.|);\mathscr{C}_L\}$ satisfait la propriété de Skolem les deux notions de "Träge" sont équivalentes.

4.3. IL N'Y A PAS DE TRANSFERT POUR LA PROPRIETE DE SKOLEM.

PROPOSITION 12. *Soient* $(K,|.|)$ *un corps valué complet pour une valeur absolue discrète, i.e.* $|K^\times|\simeq\mathbb{Z}$ *et* π *est une uniformisante, supposons que le corps résiduel* k *de* K *soit le corps des nombres complexes. Soient* T *transcendant sur* K, $|.|_g$ *la valeur absolue de Gauss sur* K(T) *associée à* $|.|$ *et à* T. *Alors le corps valué* $(K(T),|.|_g)$ *ne satisfait pas la propriété de Skolem.*

DEMONSTRATION. Soient $L=(K(T),|.|_g)$, L^0 son anneau de valuation, $\ell=k(T)$ son corps résiduel.

$$\text{Soit } A = \frac{L^0[X,Y,Z]}{(Y^2Z-(X-Z)(X+Z)(X-\pi TZ))} = L^0[x,y,z] \text{ la } L^0\text{-algèbre}$$

graduée par deg $L^0=0$, $1 = \deg x = \deg y = \deg z$. Soient $\mathscr{C}=\mathrm{Proj}(A)$, $\mathscr{C}_L$ (resp. $\mathscr{C}_\ell$) la fibre générique (resp. spéciale) ; alors $\mathscr{C}_L$ est une courbe elliptique sur L avec un point rationnel, $\mathscr{C}_\ell$ est une courbe elliptique sur ℓ avec un point rationnel, plus précisément il existe une courbe elliptique E sur k avec $E_{(\ell)}=\mathscr{C}_\ell$.

Dans cette situation $\mathscr{C}$ est la jacobienne de $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_L$ celle de $\mathscr{C}_L$ et $\mathscr{C}_\ell$ celle de $\mathscr{C}_\ell$. Comme $\mathscr{C}_L$ a un invariant j transcendant sur K le groupe $\mathscr{C}_L(L)$ est de type fini ([La], p. 139).
On a $\mathscr{C}_\ell(\ell)\supset E(k)$ et $E(k)\simeq\mathbb{C}/\Lambda$ comme groupe (où Λ est un réseau de $\mathbb{C}$). Cela permet, comme pour la proposition 11 (§4.2.1) de montrer qu'il existe $a\in\mathscr{C}_\ell$ un point fermé tel que $\{a\}\neq\overline{\{y\}}\cap\mathscr{C}_\ell$ pour tout point $y\in\mathscr{C}_L$, fermé dans $\mathscr{C}_L$.

Comme pour le théorème 3 du §4.2.2, on peut donc montrer que $\{(L,|.|_g);\mathscr{C}_L\}$ ne satisfait pas la propriété de Skolem.

5. BIBLIOGRAPHIE

[Ar] M. ARTIN, Néron models, chp VIII de Arithmetic geometry ed. par G. Cornell, J.M. Silverman. Springer Verlag. 1986.

[Bo1] S. BOSCH, K-affinoid Tori, Math. Ann 192 (1971),1-16.

[Bo2] S. BOSCH, Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme. Manus. math 20 (1977) 1.27.

[B.L.R] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. Néron models (à paraître).

[Bki] N. BOURBAKI, Algèbre, chap. V, Hermann, Paris (1981).

[Ch] T. CHIMBURG, Minimal models for curves over Dedekind rings. chp.XIII de Arithmetic geometry...

[De] M. DESCHAMPS, Réduction semi-stable. Chp.1 du Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins 2, éd. par L. Szpiro. astérisque n°86, 1981.

[De1] M. DEURING, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisorem des Konstantenkörpers. Math. Z. 47 (1942), 643-654.

[De2] M. DEURING, Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom. Geschlechte Eins. II. Nach. Akad. Wiss. Göttingen, math-phys. Kl (1955), 13-42.

[Fr] J. FRESNEL, Géométrie analytique rigide, Polycopié, Université de Bordeaux I, 1984.

[Fr,Ma] J. FRESNEL, M. MATIGNON, Structure des espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué, complet, ultramétrique, Annali di mathematica pura ed applicata, à paraître.

[Fr,vdP] J. FRESNEL, M. van der PUT, Géométrie analytique rigide et applications, Progress in Math. 18, Birkäuser, 1981.

[Gro] A. GROTHENDIECK, EGA, Publ I.H.E.S. n°11, 24,28.

[Jo] J.P. JOUANOLOU, Théorèmes de Bertini et applications, Progress in Math 42, Birkäuser, 1984.

[Ko] U. KOPF, Uber eigentliche algebraischen Varietäten über affinoïden Raüme; Schriftenreihe. Math. Inst. Univ. Münster 2 - Serie Heft 7 (1974).

[La1] E. LAMPRECHT, Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren, Arch. Math. 8 (1957), 30-38.

[La2] E. LAMPRECHT, Restabbildungen von Divisoren I, Arch. Math. 8 (1957), 255-264.

[La] S. LANG, Fundamentals of diophantine geometry Springer-Verlag 1983.

[Ma1] M. MATIGNON, Genre et genre résiduel des corps de fonctions values, Manus. Math. à paraître.

[Ma2] M. MATIGNON, Genre et genre résiduel des corps de fonctions values. Thèse Bordeaux, 1987, à paraître.

[Ma,Oh] **M. MATIGNON, J. OHM**, A fundamental equality for simple transcendental extensions of valued fields, à paraître.

[Mi1] **J.S. MILNE**, Abelian varieties, chp.V de Arithmetic geometry.

[Mi2] **J.S. MILNE**, Abelian varieties, chp.VII de Arithmetic geometry.

[Mo-Ba] **L. MORET-BAILLY,** Problèmes diophantiens sur l'anneau des entiers algébriques. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1985-86, exp. n°22.

Points entiers des variétés arithmétiques. Séminaire DPP. 1985-86.

[Mo-Ba,Szp] **L. MORET-BAILLY, L. SZPIRO**, à paraître.

[M] **D. MUMFORD**. Abelian varieties.

[Ne] **E. NERING**, Reduction of an algebraic function field modulo a prime in the constant field. Ann. of Math., II, ser. 67 (1957), 590-606.

[Po] **H. POPP**, Uber das Verhalten des Geschlechtseines Funktionenkörper, Math. Z. 106,17-35 (1968).

[Ro1] **P. ROQUETTE**, Zur Theorie der Konstantenreduktion algebraischer Mannigfaltigkeiten, J. für die reine und angew. Math.) t. 200 (1958), 1-44.

[Ro2] **P. ROQUETTE**, Solving diophantine equations over the ring of all algebraic integers, Atas da 8ª Escola de Algebra. Vol 2 IMPA 84.

[Ru] **R. RUMELY**, Arithmetic over the ring of all algebraic integers, J. für die reine und angew. Math., t. 368 §(1986), 127-133.

[Se] **J.P. SERRE**, Geométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier 6(1956) pp. 1-42.

[Sk] **T. SKOLEM.** Lösung gewisser Gleichungen in ganzen algebraischen Zahlen insbesondere in Einheiten. Skrifter Norske Videnkaps Akademi, Oslo, Mat. Naturv. Kl.10 (1934).