SECONDE EDITION

JUIN 2008

MSI 101

PROPOSITION DE COURS

Agnès Bachelot – Bernadette Munos

Table des matières

Chapitre 1

Bases de logique et théorie des ensembles

A peu près 7 séances de 1h20mn .

1.1 Opérations logiques - Raisonnements

Cette partie **1.1** est vue dans l'UE de méthodologie.

1.2 Ensembles et parties d'un ensemble

1.2.1 Ensembles et éléments

On appelle *ensemble* E une collection d'objets, dits *éléments* de E.
Exemples :

$$E = \{a, b, ..., z\} \qquad E = \{0, 1, 2, ..., 9\} \qquad \mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$$

Notations : La proposition « x est un élément de E »se note $x \in E$ et se lit « x appartient à E ».
La proposition « x n'est pas un élément de E »se note $x \notin E$ et se lit « x n'appartient pas à E ».

Notation : $A = \{x \in E \,; R\{x\}\}$ signifie que A est l'ensemble des $x \in E$ qui satisfont R. i.e.

$$x \in A \Longleftrightarrow (x \in E) \text{ et } (R\{x\} \text{ estvraie})$$

Exemple : $E = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 - 3x - 10 \; < 0\}$

1.2.2 Sous-ensembles

Inclusion : On dit que A est *inclus* dans B si tout élément de A est élément de B. On note $A \subset B$.
On dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B ou une *partie* de B.

On convient que la partie n'ayant aucun élément, appelée l'*ensemble vide* et notée $\emptyset$, est un sous-ensemble particulier de E. C'est donc un sous-ensemble de tous les ensembles.

Pour toute partie A de E, les propositions $A \subset E$ et $\emptyset \subset A$ sont donc vraies.

Egalité d'ensembles : Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments. i.e.

$$E \;=\; F \Longleftrightarrow (\, E \subset F \text{ et } F \subset E\,)$$

Transitivité de l'inclusion :

1.2.3 Produit d'ensembles

Définition : Soient E et F deux ensembles. A partir de deux éléments $x \in E$ et $y \in F$ on construit le *couple* (x, y) avec la propriété fondamentale :

$$(x_1, y_1) \;=\; (x_2, y_2) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2) \text{ et } (y_1 = y_2)$$

Définition : Soient E et F deux ensembles. On définit un nouvel ensemble noté $E \times F$ (produit de E par F) en considérant l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. i.e.

$$(x, y) \;\in E \times F \Longleftrightarrow \;(\, x \in E \text{ et } y \in F\,)$$

Remarque : • Attention à l'ordre.
• ne pas confondre avec $\{x, y\}$.
• $(x, y) \;=\; (y, x) \Longleftrightarrow x = y$

Exemples : E^2, le plan $\mathbb{R}^2$

Généralisation et exemples : L'espace $\mathbb{R}^3$, l'espace-temps $\mathbb{R}^4$

Associativité : Si l'on a trois ensembles E, F, G et si l'on dispose de trois éléments $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$, on décide d'identifier le triplet (x, y, z) et la paire $((x, y), z)$. Avec cette identification, on convient que $(E \times F) \times G = E \times F \times G = E \times (F \times G)$.

1.2.4 Rappel : quantificateurs

Soit $R\{x\}$ une proposition dépendant d'un élément x d'un certain ensemble E.

Définition : • $(\forall\, x \in E \qquad R\{x\})$ se lit << pour tout élément x de E, $R\{x\}$ >> .
Elle est vraie si pour tout élément x de E, la proposition $R\{x\}$ est vraie ; elle est fausse sinon.
• $(\exists\, x \in E \qquad R\{x\})$ se lit << il existe un élément x de E , $R\{x\}$ >> .
Elle est vraie s'il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $R\{x\}$ soit vraie ; elle est fausse sinon.

Par définition : $\quad$ non $(\forall\, x \in E \quad R\{x\}) \iff (\exists\, x \in E \quad \text{non } R\{x\})$
On en déduit : $\quad$ non $(\exists\, x \in E \quad R\{x\}) \iff (\forall\, x \in E \quad \text{non } R\{x\})$

1.2.5 Opérations sur les ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

Complémentaire : $\complement_E A$ (noté A^c dans la suite) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. i.e.

$$\forall\, x \in E \qquad x \in \complement_E A \Longleftrightarrow x \notin A$$

ou de manière équivalente :
$$\complement_E A \;=\; \{x \in E,\; x \notin A\}$$

Intersection : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B. i.e.

$$\forall x \in E \qquad x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

ou de manière équivalente :
$$A \cap B \;=\; \{x \in E,\; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Union : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B. i.e.

$$\forall x \in E \qquad x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

ou de manière équivalente :
$$A \cup B \;=\; \{x \in E,\; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Notation : $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B. i.e.

$$A \backslash B = A \cap \complement_E B$$

Propriétés :
• Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
• Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
• Distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
• $A \cap \emptyset \;=\; \emptyset$, $A \cup \emptyset \;=\; A$
• $A \cup A \;=\; A$, $A \cap A \;=\; A$
• $(A \cap B)^c \;=\; A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c \;=\; A^c \cap B^c$

Axiome des parties : A tout ensemble E on peut associer un autre ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E ; ce nouvel ensemble est noté $\mathcal{P}(E)$.
i.e. $A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$

1.3 Notion d'application

1.3.1 Application d'un ensemble E dans un ensemble F ; exemples

Définition : On appelle *application* (ou encore *fonction*) f de l'ensemble E dans l'ensemble F la donnée des ensembles E, F et d'une partie G de $E \times F$ telle que, pour tout x dans E, il existe un élément y et un seul tel que $(x, y) \in G$.
• E est l'ensemble de départ de l'application. • F est l'ensemble d'arrivée de l'application. • G est le *graphe* de l'application. • y est l'image de x par l'application et on note $y = f(x)$ ou encore $f\;: x \mapsto f(x)$.
• x est un antécédent de y par l'application f.

Exemples : Id_E, injection canonique de E dans F ($E \subset F$), projections de $E \times F$ dans E ou F.

Egalité d'applications : deux applications sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe.

Exemples :

Restriction de f à une partie A de E : c'est l'application notée $f_{|A}$ et définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E .

1.3.2 Image directe, image réciproque

Image directe : Pour toute partie A de E, on appelle *image directe* de A et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) := \{y \in F\,;\, \exists a \in A \text{ tel que } y = f(a)\}\,.$$

c'est-à-dire : $y \in f(A) \iff (\, y \in F \text{ et } \exists a \in A \text{ tel que } y = f(a)\,)$
ou encore : $f(A) = \{f(a)\,;\, a \in A\}$

Image réciproque : Pour toute partie B de F, on appelle *image réciproque* de B et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) := \{x \in E\,;\, f(x) \in B\}\,.$$

c'est-à-dire : $x \in f^{-1}(B) \iff (\, x \in E \text{ et } f(x) \in B)$

Exemples et Dessins

Remarques :
- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \subset f^{-1}(f(A))$ (exercice)
- $\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f(f^{-1}(B)) \subset B$ (exercice).

1.3.3 Composition des applications

Définition : Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G, on définit *l'application composée* $g \circ f$ par

$$\forall x \in E\,,\ g \circ f(x) := g(f(x))$$

C'est une application de E dans G.

Exemples sans oublier $f \circ Id_E$ et $Id_F \circ f$.

Associativité
Non commutativité

1.3.4 Famille d'éléments d'un ensemble

Définition et notation Etant donnés deux ensembles I et E, on appelle famille d'éléments de E indexée par I, toute application de I dans E. On utilise la notation $(x_i)_{i\in I}$ à la place de $i \mapsto x(i)$.

Par exemple $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est identifié avec $\{x_1, \cdots, x_p\}$.

Généralisation de l'intersection et de l'union : On considère une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties A_i d'un même ensemble E.

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in E\,,\, \forall i \in I\, x \in A_i\} \quad , \quad \bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in E\,,\, \exists i \in I\, x \in A_i\}$$

1.3.5 Injection, surjection, bijection

Injection : Une application f de E dans F est dite *injective* (on dit que c'est une injection) si et seulement si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution x dans E. i.e.

$$\forall x \in E\,,\ \forall x' \in E\,,\ (f(x) = f(x')) \Longrightarrow (x = x')$$

ou encore par contraposée :

$$\forall x \in E\,,\ \forall x' \in E\,,\ (x \neq x') \Longrightarrow (f(x) \neq f(x'))$$

ou encore « tout élément y de F a au plus un antécédent dans E ».

Exemple : L'application $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective, tandis que $x \mapsto x^2$ (toujours de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ne l'est pas.

Surjection : Une application f de E dans F est dite *surjective* (on dit que c'est une *surjection*) si et seulement si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet toujours une solution x dans E. i.e.

$$\forall y \in F\,,\ \exists x \in E\,, y = f(x)$$

ou encore $f(E) = F$, ou encore « tout élément y de F a au moins un antécédent dans E ».

Exemple. L'application $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective, tandis que $x \mapsto x^2$ (toujours de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ne l'est pas.

Bijection : On appelle *bijection* entre deux ensembles E et F une application de E dans F qui est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans E. i.e.

$$\forall y \in F\,,\ \exists !\, x \in E\,, y = f(x)$$

Si f est bijective on peut donc définir une application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On appelle cette application *l'application réciproque de* f et on la note f^{-1}.

Proposition 1.1. *Soit f bijective :*
- $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- $f \circ f^{-1} = Id_F$ *et* $f^{-1} \circ f = Id_E$

Remarque : Lorsque f est bijective l'image réciproque d'une partie B de F vérifie donc :

$$f^{-1}(B) = \left\{f^{-1}(b),\, b \in B\right\}$$

.

Théorème 1.2. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors f et g sont toutes les deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.*

Corollaire : Si f est une bijection de $E \to F$, alors f^{-1} est bijective et on a : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemples :

Proposition 1.3. • *La composée de deux injections est une injection.*
• *La composée de deux surjections est une surjection.*
• *La composée de deux bijections est une bijection, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

FIN DU CHAPITRE 1

Chapitre 2

Nombres entiers - Dénombrement-Initiation à l'arithmétique - Nombres rationnels

A peu près 4 séances de 1h20mn .

2.1 Nombres entiers

2.1.1 Relation d'ordre dans un ensemble

Définition : Soit E un ensemble. Une relation $\leq$ dans E est appelée *relation d'ordre* si :
- $\forall a \in E \qquad a \leq a \quad$ (*réflexivité*)
- $\forall (a,b) \in E \times E \qquad ((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \Longrightarrow (a = b) \quad$ (*antisymétrie*)
- $\forall (a,b,c) \in E \times E \times E \qquad ((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \Longrightarrow (a \leq c) \quad$ (*transitivité*).

Définition : L'ordre est *total* s'il permet de comparer deux éléments quelconques. On dit alors que E est totalement ordonné.

Soient E un ensemble ordonné par la relation $\leq$ et A une partie de E.
On appelle :

Majorant de A : un élément M de E supérieur ou égalà tous les éléments de A.
i.e. (M majore A) $\Longleftrightarrow$ ($\forall a \in A \quad a \leq M$)

Minorant de A : un élément m de E inférieur ou égalà tous les éléments de A.
i.e. (m minore A) $\Longleftrightarrow$ ($\forall a \in A \quad m \leq a$)

Plus grand élément de A : un majorant de A qui appartient à A. S'il existe, il est unique.

Plus petit élément de A : un minorant de A qui appartient à A. S'il existe, il est unique.

2.1.2 Les entiers

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, non vide, totalement ordonné, vérifiant les propriétés suivantes :

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.
- $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

Conséquences :
- $\mathbb{N}$ a un plus petit élément noté 0.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le plus petit élément de $\{p \in \mathbb{N}\ ;\ p > n\}$ existe et s'appelle le *successeur* de n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le plus grand élément de $\{p \in \mathbb{N}\ ;\ p < n\}$ existe et s'appelle le *prédécesseur* de n.

On définit sur $\mathbb{N}$ les deux lois de composition usuelles : addition et multiplication.

Propriétés : Commutativité, associativité, élément neutre et absorbant, distributivité.

Théorème 2.1. *Soit A une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant :*

$$0 \in A \text{ et } (n \in A \implies n+1 \in A)$$

Alors $A = \mathbb{N}$.

Application : Raisonnement par récurrence.

2.1.3 Dénombrement

A) Applications d'un ensemble fini dans un autre

Définition : Un ensemble E est fini s'il existe un entier naturel n et une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans E. On note $n = \text{Card}E$.

Proposition 2.2. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. *Si E et F sont disjoints :* $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F$
2. *Si E et F sont quelconques :* $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}E + \text{Card}F - \text{Card}(E \cap F)$
3. $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}E \times \text{Card}F$

Proposition 2.3. *Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p et $f : E \to F$ une application.*
- *Si f est injective alors $n \leq p$.*
- *Si f est surjective alors $n \geq p$.*

Proposition 2.4. *Soient E et F deux ensembles finis ayant même nombre d'éléments n, et $f : E \to F$ une application. Alors :*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

B) Éléments de combinatoire

Proposition 2.5. *Si E est de cardinal n, le nombre de parties de E est égal à 2^n.*

Dans un ensemble à n éléments, on peut compter le nombre de parties à p éléments, $p = 0, ..., n$. Il y a 1 partie à 0 élément (la partie vide), n parties à 1 élément, *etc.*

Définition : On note $\binom{n}{p}$ (ou C_n^p) le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

$\binom{n}{p}$ s'appelle le coefficient binomial de n et de k.

Donc $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{1}{n} = n$, et $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \;=\; 2^n$.

Propriétés : Pour tout $n > 1$ et tout p entre 1 et $n-1$, on a la proposition

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Triangle de Pascal : En convenant que $\binom{0}{0} = 1$, cette liste de propositions s'écrit sous forme d'un tableau triangulaire descendant :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(on a indiqué sur la ligne n ($n = 0, 1, ...$) la liste dans l'ordre des nombres $\binom{n}{p}$ pour $p = 0, ..., n$).

Proposition 2.6.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

La formule du binôme dans le calcul algébrique commutatif :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} .$$

où, $\sum_{p=0}^{n} a_p$ désigne la somme $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} + a_p$.

Notations : Plus généralement, pour A une famille finie d'entiers :

- $\sum_{p\in A} a_p$ désigne la somme des élément a_p, p décrivant l'ensemble A. Par convention : si A est l'ensemble vide, cette somme est nulle, et si A est un singleton $\{p_0\}$, cette somme vaut a_{p_0}.
- $\prod_{p\in A} a_p$ désigne le produit des élément a_p, p décrivant l'ensemble A. Par convention : si A est l'ensemble vide, ce produit est égal à 1, et si A est un singleton $\{p_0\}$, ce produit vaut a_{p_0}.

2.2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Remarque : Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x+a = b$ n'a pas de solution pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. On construit alors $\mathbb{Z}$, l'ensemble des **entiers relatifs**, qui est le plus petit ensemble contenant $\mathbb{N}$ tel que l'équation $x + a = b$ y ait une solution pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

Propriétés de $\mathbb{Z}$: tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un *opposé*. $\mathbb{Z}$ est totalement ordonné.

Rappel : valeur absolue.
Définitions :
- Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. S'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$, on dit que :
  - a est un multiple de b.
  - b est un diviseur de a. On dit « b divise a ». on note $b|a$.
- Un entier $p > 1$ est dit premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Propriétés :

1. 0 est un multiple de tout entier et tout entier divise 0.
2. Si $a \neq 0$ alors $b|a \Longrightarrow |b| \leq |a|$.

Définitions : Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls. On appelle PGCD de a et de b le plus grand diviseur commun de a et de b.
Soient a et b dans $\mathbb{Z}$, le PGCD de a et de b est le PGCD de $|a|$ et de $|b|$.
(*Existence* : puisque toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.)

Nombres premiers entre eux : leur PGCD vaut 1. C'est-à-dire les seuls diviseurs communs à a et à b sont 1 et -1.

Théorème 2.7 (Division euclidienne). *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b \neq 0$. Il existe un couple unique $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que*

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

q est appelé quotient, et r reste de la division de a par b.

Détermination pratique du PGCD : C'est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

La démonstration se fait par application réitérée du lemme suivant :

Lemme 2.8. *: Soient a et b deux entiers non nuls tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Alors l'ensemble des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs de b et de r.*

Algorithme d'Euclide : il consiste en la suite de calculs suivante :

$$\begin{array}{rcl} a & = & bq_0 + r_0 \\ b & = & r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 & = & r_1 q_2 + r_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ r_{N-2} & = & r_{N-1} q_N + r_N \\ r_{N-1} & = & r_N q_{N+1} + 0 \end{array}$$

(comme les restes successifs $r_0, r_1, ...$ décroissent strictement et qu'il y a un nombre fini d'entiers entre 0 et $|b|$, il vient forcément un moment où r_N divise r_{N-1}, r_N étant le dernier reste obtenu non nul).
On déduit du lemme précédent que l'ensemble des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs communs de r_N et de 0, donc est l'ensemble des diviseurs de r_N. Le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de a et de b est donc le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs de r_N.
Autrement dit :

- Le PGCD de a et b est égal à r_N.
- L'ensemble des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs du PGCD.

Théorème 2.9 (Identités de Bézout). 1. *Soient a et b deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}$. On note d le* PGCD (a,b). *Alors il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $d = au + bv$.*

2. *Deux entiers a et b de $\mathbb{Z}$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v de $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.*

Remarques :
- Si d est le PGCD de a et de b alors a' et b' sont premiers entre eux, en notant $a = da'$ et $b = db'$.
- L'équation $au + bv = d \neq 0$ n'a de solution que si d est un multiple de $\mathrm{PGCD}(a,b)$.

Lemme 2.10 (de Gauss). *Soient a et b deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}$ avec* PGCD $(a,b) = 1$. *Si c est un nombre entier relatif tel que b divise ac, alors b divise c.*

Enoncer sans démonstration la proposition suivante :

Proposition 2.11. *Tout entier $n > 1$ est un nombre premier ou un produit de nombres premiers. La décomposition est unique à l'ordre près.*

2.3 Les rationnels

Remarque : Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $ax = b$ n'a pas de solution pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. On admet l'existence de $\mathbb{Q}$, l'ensemble des **rationnels**, qui est le plus petit ensemble contenant $\mathbb{Z}$ tel que l'équation $(ax = b)$ y ait une solution pour tout a non nul dans $\mathbb{Z}$ et tout b dans $\mathbb{Z}$.

FIN DU CHAPITRE 2

Chapitre 3

Nombres réels et propriétés de $\mathbb{R}$

A peu près 3 séances de 1h20mn .

L'équation $ax = b$ a une solution dans $\mathbb{Q}$ pour tout a non nul dans $\mathbb{Z}$ et tout b dans $\mathbb{Z}$.
Mais dans $\mathbb{Q}$ la partie $A = \{x \in \mathbb{Q}\,,\ x^2 < 2\}$ est majorée par 2 mais n'admet pas de borne supérieure. On construit alors $\mathbb{R}$ qui est le plus petit ensemble tel que toute partie majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. borne inférieure).

On admet l'existence de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés définies et développées dans la suite.

3.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

3.1.1 Corps totalement ordonné

Définition de corps :
On appelle *corps commutatif* un ensemble A muni de deux lois de composition interne :

$$\text{l'addition} \ : \ \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}\ , \qquad \text{et la multiplication} \ : \ \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

qui ont les propriétés suivantes :

1. (a) $+$ est associative : $\forall (x,y,z) \in A^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
   (b) $+$ est commutative : $\forall (x,y) \in A^2 \quad x+y = y+x$
   (c) $+$ Il existe un élément neutre 0 tel que $\forall x \in A \quad x+0 = 0+x = x$
   (d) $+$ Tout élément admet un opposé noté $-x$ tel que $\forall x \in A \quad (-x)+x = x+(-x) = 0$
   Ces quatre propriétés font de A un *groupe commutatif* pour $+$.
2. (a) $\times$ est associative : $\forall (x,y,z) \in A^3 \quad (xy)z = x(yz)$
   (b) $\times$ est commutative : $\forall (x,y) \in A^2 \quad xy = yx$
   (c) $\times$ Il existe un élément neutre 1 tel que $\forall x \in A \quad x1 = 1x = x$
   (d) $\times$ Tout élément $\neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} tel que $x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$
   Ces quatre propriétés font de $A^* = A\backslash\{0\}$ un *groupe commutatif* pour $\times$.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition. i.e. $\forall (x,y,z) \in A^3 \quad (x+y)z = xz+yz$

Définition : Un nombre réel est dit rationnel si c'est le quotient de deux entiers relatifs.

$$\mathbb{Q} \ = \ \{x = \frac{p}{q} \ , \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z}^*\}$$

Proposition : Muni des lois $+$ et $\times$ usuelles ainsi que de la relation d'ordre $\leq$, $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.

L'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication par des réels positifs.

3.1.2 $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure

Rappel : Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *majorée* s'il existe un réel M supérieur ou égal à tous les éléments de A. i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leq M$$

On appelle :

Borne supérieure de A : le plus petit des majorants de A. S'il existe, il est unique. On le note $\sup A$.

Borne inférieure de A : le plus grand des minorants de A. S'il existe, il est unique. On le note $\inf A$.

Proposition 3.1.

$$M = \sup(A) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1) & M \text{ est un majorant de } A \\ 2) & M \text{ est le plus petit des majorants de } A \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1) & \forall x \in A\,,\ x \leq M \\ 2) & \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A \ / \ M - \varepsilon < x \leq M \end{array} \right.$$

$$m = \inf(A) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1) & m \text{ est un minorant de } A \\ 2) & m \text{ est le plus grand des minorants de } A \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1) & \forall x \in A\,,\ m \leq x \\ 2) & \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A \ / \ m \leq x < m + \varepsilon \end{array} \right.$$

Proposition 3.2. *a plus grand élément de $A \Longrightarrow a$ borne supérieure de $A \Longrightarrow a$ majorant de A.*

Réciproques fausses.

Proposition : Tout sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. borne inférieure). On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Archimédien : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \qquad nx \ \geq \ y$

D'où la proposition :

Proposition 3.3. *$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, archimédien et tel que tout sous-ensemble non-vide majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. borne inférieure).*

3.1.3 Valeur absolue

Valeur absolue sur $\mathbb{R}$: $|x|$ est le réel : $|x| := \max\ (x, -x)$.

Propriétés de $|.|$:

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}\,, & |-x| = |x| & \\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,, & |xy| = |x| \times |y| & \\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,, & |x + y| \leq |x| + |y| & \text{Inégalité triangulaire} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,, & |\,|x| - |y|\,| \leq |x - y| & \text{Conséquence de l'inégalité triangulaire} \end{array}$$

Remarque : Un réel x qui vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \ |x| \leq \varepsilon$ est nul.

3.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition : Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires, c'est-à -dire :

$$\forall (c,d) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad c \leq x \leq d \Rightarrow x \in I$$

Remarque : L'ensemble vide est un intervalle. Un singleton est un intervalle.

La propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles I de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un élément :

1. Si I est borné il possède une borne supérieure b et une borne inférieure a distinctes. I est alors d'une des formes suivantes :
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\} :=]a,b[$ *intervalle ouvert*
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x \leq b\} := [a,b]$ *intervalle fermé* (ou *segment*)
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \leq b\} :=]a,b]$ et $\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leq x < b\} := [a,b[$ intervalles *semi-ouverts* (respectivement à gauche et à droite)
2. On suppose I non borné (i.e. non majoré ou non minoré). En notant $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$, I est d'une des formes suivantes :
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x < b\} :=]-\infty, b[$ dit *ouvert*
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq b\} :=]-\infty, b]$ dit *fermé*
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x > a\} :=]a, +\infty[$ dit *ouvert*
   - $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq a\} := [a, +\infty[$ dit *fermé*

D'où $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

3.3 Propriétés des rationnels et irrationnels

Propriétés admises : $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné. Mais il ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

L'ensemble des irrationnels ($:= \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) n'est pas un corps.

Remarque : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Théorème 3.4 (Densité des rationnels et des irrationnels)**.** *Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel et un irrationnel. On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

A démontrer en exercice.

FIN DU CHAPITRE 3

Chapitre 4

Nombres complexes

A peu près 5 séances de 1h20mn .

Il s'agit de réviser et d'enrichir les notions vues en terminale.

4.1 Définitions

Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On construit alors l'ensemble des **nombres complexes**.

On admet l'existence d'un corps commutatif noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient un élément dont le carré vaut -1. On le note i.
- Si z est un complexe, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z et sont notés $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée l'écriture cartésienne de z.

Rappels : $\mathbb{C}$ est muni des lois de composition interne suivantes :

- addition : $(a + ib) + (a' + ib') \ = \ a + a' + i(b + b')$
- multiplication : $(a + ib) \times (a' + ib') \ = \ (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Pas de relation d'ordre.

Soit $z = a + ib$. Par définition on appelle *conjugué* de z le complexe $\overline{z} = a - ib$ et on appelle *module* de z le nombre réel positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique :

On appelle *plan complexe* un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On peut représenter le nombre complexe $z = a + ib$ par le point M de coordonnées (a, b). z est appelé *affixe* de M.

4.2 Propriétés

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\overline{z}} & = & z \\ \overline{z} = z & \Longleftrightarrow & z \in \mathbb{R} \\ |z| & = & |\overline{z}| \\ \overline{z_1 + z_2} & = & \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} & = & \overline{z_1} \times \overline{z_2} \\ |z|^2 & = & z \times \overline{z} \\ |z_1 z_2| & = & |z_1| \times |z_2| \\ |z_1 + z_2| & \leq & |z_1| + |z_2|\,, \end{array}$$

L'égalité dans l'inégalité n'a lieu que si $z_2 = 0$ ou si $z_1 = \alpha z_2$ où $\alpha \geq 0$.

4.3 Forme trigonométrique

Notation : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos\theta + i\sin\theta$ est un nombre complexe de module 1 ; on le note $e^{i\theta}$
Réciproquement : soit z un complexe de module 1, on fait correspondre à z le point $M(z)$ d'affixe z qui se trouve sur le cercle unité ; donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M ait pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ et donc z peut s'écrire $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Finalement : $|z| = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R},\ z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Soit z un complexe non nul. On a $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$ où $\dfrac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1, donc on peut écrire $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou encore $z = re^{i\theta}$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée l'écriture trigonométrique de z.
On dit que θ est un argument de z. θ n'est pas unique : $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

Proposition 4.1. *Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.*

$$\begin{array}{rcl} zz' & = & rr'e^{i(\theta+\theta')} \\ \overline{z} & = & re^{-i\theta} \\ z = z' & \Longleftrightarrow & r = r' \text{ et } \theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array}$$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Formule de Moivre : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^n\ =\ \cos n\theta\ +\ i\sin n\theta$$

4.4 Exponentielle complexe

Définition : On étend à $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle : on appelle *exponentielle complexe* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à $z = a + ib$ associe $e^z\ :=\ e^a\, e^{ib}\ =\ e^a\,(\cos b + i\sin b)$

Propriétés : • $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ • exp est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mais n'est pas injective.

4.5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

4.5.1 Racines n-ièmes

Proposition 4.2. *l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est*

$$\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k = 0 \cdots n-1\}$$

A démontrer.

Les affixes de ces points sont les n sommets (dont le point $(1,0)$) du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Ce polygone est unique car il a pour sommet le point $(1,0)$; on obtient ses autres sommets en découpant à partir du point $(1,0)$ le cercle de rayon 1 en n arcs de longueur égale à $\dfrac{2\pi}{n}$; voir la figure ci-dessous.

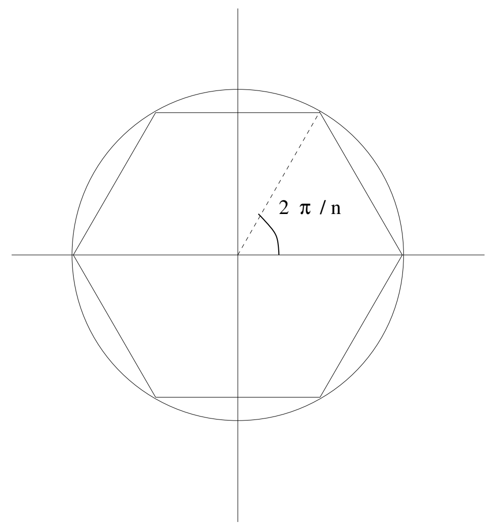


FIG. 4.1 – Racines n-èmes de l'unité

Propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$

Application : Résolution de $z^n = z_0 = re^{i\theta}$

Attention : Un nombre complexe z ayant dans $\mathbb{C}$ n racines n-ièmes, il n'est pas possible de donner un sens aux écritures $\sqrt{z}$ et $\sqrt[n]{z}$. On dira : soit z *un* complexe tel que $z^2 = x$, mais on n'écrira pas : *on pose* $z = \sqrt{x}$.

4.5.2 Equation du second degré

En exercice

FIN DU CHAPITRE 4

Chapitre 5

Suites réelles

A peu près 5 séances de 1h20mn .

5.1 Généralités

Définition : On appelle *suite réelle* une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n).

La suite peut aussi démarrer à l'indice n_0 ; on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Rappels : suite constante, croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante, monotone, strictement monotone, majorée, minorée, bornée, stationnaire.

Opérations sur les suites :
- addition : $(w_n) = (u_n) + (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n$
- Multiplication interne : $(w_n) = (u_n)\,(v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n\, v_n$
- Multiplication par un réel α : $(w_n) = \alpha\,(u_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \alpha\, u_n$

Le développement de la notion suivante est du programme du semestre 2 :
Définition : On appelle *suite extraite* de la suite (u_n) une suite constituée de certains termes de (u_n), plus précisément une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
Exemples : (u_{2n}), (u_{2n+1})

5.2 Convergence d'une suite réelle

Définition : Soient (u_n) une suite et l un réel. On dit que (u_n) *converge vers* l si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

On dit qu'une suite *diverge* si elle ne converge vers aucun réel.

Théorème 5.1. *Si une suite converge, sa limite est unique. On la note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

A démontrer.

Exemple : $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, Suite géométrique avec $|a| < 1$.

Théorème 5.2. *Toute suite convergente est bornée.*

A démontrer.

Réciproque fausse.

Théorème 5.3. *Toute suite convergeant vers un réel strictement positif est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.*

Théorème 5.4. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.*

Admis

Corollaire : Si l'on peut extraire de (u_n) deux suites qui ont des limites distinctes, alors (u_n) est divergente.

5.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition : Soient (u_n) et (v_n) des suites convergentes de limite respective l et l'. Alors
- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l'$
- La suite $(u_n v_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $\alpha(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha l$

A démontrer (au moins une).

Proposition : Soit (u_n) une suite convergente de limite $l \neq 0$. Alors
- il existe un entier n_0 tel que pour tout entier supérieur ou égal à 0, $u_n \neq 0$.
- la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente et sa limite est $\dfrac{1}{l}$.

Théorème 5.5 (Limite et inégalité)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes.*

$$\text{Si} \qquad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq v_n \qquad \text{alors} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Proposition : Le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0 est une suite qui converge vers 0. A démontrer.

5.4 Généralisation

Définition : On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang. C'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A)$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On définit de même une suite tendant vers $-\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A)$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Suite géométrique avec $a > 1$.

Avec ces généralisations on étend les opérations sur les limites. On résume les différents cas dans les tableaux suivants :

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers	si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers	alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers	alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers
l	l'	$l+l'$	ll'
$+\infty$	l'	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad l' > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad l' < 0 \\ ? & \text{si} \quad l' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	l'	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad l' > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad l' < 0 \\ ? & \text{si} \quad l' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers	alors $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers
l	al
$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$

5.5 Théorèmes d'existence de limites

Théorème 5.6. *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge vers sa borne supérieure (resp. borne inférieure).*

Théorème 5.7. *Toute suite croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Théorème 5.8 (Encadrement)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que*

$$\exists n_0 \in N \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors (v_n) converge et sa limite est l.

Théorème 5.9 (Suites adjacentes)**.** *Deux suites réelles sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence converge vers 0.*
Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

A démontrer

5.6 Exemples

Rappels suite géométrique

FIN DU CHAPITRE 5

Chapitre 6

Fonctions numériques

A peu près 8 séances de 1h20mn .

6.1 Généralités sur les fonctions

- On appelle *fonction d'une variable réelle à valeurs réelles*, ou encore, *fonction numérique*, une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La partie D est appelée *ensemble de définition* de la fonction.
- f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$
- f est bornée si elle est minorée et majorée. Cela équivaut à : $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A$

6.2 Limite

Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point de $\overline{D}$ s'il est la limite d'une suite de points de D.

Remarque : Dans la pratique on considèrera des fonctions dont le domaine de définition D est : soit un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, soit un tel intervalle privé d'un point, soit une réunion finie de tels sous-ensembles.

6.2.1 Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Définition 6.1. *Soit $l \in \mathbb{R}$.*

1. *Soit x_0 réel appartenant à $\overline{D}$. On dit que f admet l pour limite en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

2. *Si D n'est pas majoré, on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in D \qquad x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

3. *Si D n'est pas minoré, on dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B < 0 \quad \forall x \in D \qquad x \leq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque : Si x_0 est un point de D et si f admet une limite finie en x_0, alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$.

Dans la suite a désignera soit x_0 appartenant à $\overline{D}$, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Unicité de la limite : (*à démontrer*) Si f admet l et l' pour limites en a, alors $l = l'$.

On peut donc utiliser un symbole :
Notations : Si f admet l pour limite en a, on dit que l est *la limite* de f en a, et on note :

$$l = \lim_{x \to a} f(x), \quad \text{ou} \quad \lim_a f, \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \mapsto a}{\to} l \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\to} l$$

Définition 6.2. *Généralisation :*

1. *Soit x_0 réel appartenant à $\overline{D}$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 (ou f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0) si*

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$$

2. *Si D n'est pas majoré, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists A' \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad x \geq A' \Longrightarrow f(x) \geq A$$

3. *Si D n'est pas minoré, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B' \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \qquad x \leq B' \Longrightarrow f(x) \geq A$$

4. *On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $a \in \overline{D} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.*

Avec cette notion généralisée de limite on a de même l'unicité de la limite si elle existe, et on emploie des notations analogues aux précédentes.

Caractérisation par les suites : (Démonstration ?) On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow (\text{Pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } a \text{ alors } (f(u_n)) \text{ converge vers } l)$$

Définitions : On dit que f admet l pour *limite à gauche (resp. à droite)* en a si la restriction de f à $D^- =]-\infty, a[\cap D$ (resp. à $D^+ =]a, +\infty[\cap D$) admet l pour limite en a.
Notation : $\lim\limits_{a^-}$, ou $\lim\limits_{x \to a^-}$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}}$

Remarques :

1. Pour que la limite à droite (resp. à gauche) existe il est nécessaire que $a \in \overline{D^+}$ (resp. $a \in \overline{D^-}$).
2. Soit $a \in \overline{D^+} \cap \overline{D^-}$, par exemple s'il existe $h > 0$ tel que $[a - h, a + h] \setminus \{a\} \subset D$.
   - si $a \notin D$: f admet une limite l si et seulement si elle admet l comme limite à gauche et à droite en a.

– Si $a \in D$: f admet une limite en a (qui est nécessairement $f(a)$) si et seulement si elle admet $f(a)$ comme limite à gauche et à droite en a.

– L'existence d'une limite à gauche et d'une limite à droite mêmes égales n'entraine pas l'existence d'une limite.

6.2.2 Opérations sur les limites

Opérations algébriques : Cas des limites finies.
Soient f et g deux fonctions admettant des limites en a, alors :

1. $f+g$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. fg admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. Pour tout réel λ, λf admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. Si de plus la limite de g est non nulle, $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
5. Si f admet l comme limite en a, alors $|f|$ admet $|l|$ comme limite en a.

Composition des limites : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D et D' tels que $f(D) \subset D'$. Soient a appartenant à $\overline{D}$ et b appartenant à $\overline{D'}$.

$$\text{Si} \quad \lim_b g = l \quad \text{et} \quad \lim_a f = b \quad , \qquad \text{alors} \quad \lim_a g \circ f = l$$

Opérations algébriques : Cas des limites infinies.

1. Si $\lim f = l$ et $\lim g = \pm\infty$, alors $\lim f + g = \pm\infty$.
2. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f + g = +\infty$.
3. Si $\lim f = l \neq 0$ et $\lim g = \pm\infty$, alors $\lim fg = \pm\infty$ si $l > 0$, ou $\lim fg = \mp\infty$ si $l < 0$.
4. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f\,g = +\infty$.
5. Formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞

6.2.3 Théorèmes sur les limites

– Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au « voisinage » (à définir) de a.
– Soient f une fonction admettant une limite finie l en a, et A un réel.
Si, au voisinage de a, pour tout x appartenant à D, $f(x) \leq A$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ \leq\ A$
– Soient f, g deux fonctions admettant une limite finie en a.
Si, au voisinage de a, pour tout x appartenant à D, $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ \leq\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
– Soient f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si f et h admettent une même limite $l \in \mathbb{R}$ en a, alors g admet aussi une limite en a, et cette limite est l.
– Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$.
Si f tend vers $+\infty$ en a, alors il en est de même pour g. Si g tend vers $-\infty$ en a, alors il en est de même pour f.

Remarque : Les inégalités strictes ne sont pas conservées *par passage à la limite*.

6.3 Continuité

Dans cette partie I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

6.3.1 Définitions

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f est *continue en* x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
C'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ce qui est équivalent à :

Pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Définitions :
- f est *continue à droite en* $x_0 \in I$ si la restriction de f à $[x_0, +\infty[\cap I$ est continue en x_0, i.e. $\lim_{x_0^+} f = f(x_0)$.
- f est *continue à gauche en* x_0 si la restriction de f à $]-\infty, x_0] \cap I$ est continue en x_0, i.e. $\lim_{x_0^-} f = f(x_0)$.
- Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert inclus dans I. On dit que f est *continue sur* $]a, b[$ si elle est continue en tout point x_0 de $]a, b[$.
- Soit $[a, b]$ inclus dans I. On dit que f est *continue sur* $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Remarque : f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

Prolongement par continuité : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $I \setminus \{x_0\}$, et possédant en x_0 une limite à gauche et une limite à droite égales notée alors l. On note $\widetilde{f}$ la fonction qui prend la valeur l en x_0 et qui coïncide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$. $\widetilde{f}$ ainsi définie est continue en x_0. On dit que f a été *prolongée par continuité*.

6.3.2 Propriétés

1. Si f et g continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.
2. Si f continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.
3. Si f continue en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est continue en x_0.
4. Si f continue en x_0 et si g continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

6.3.3 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 6.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f prend sur I deux valeurs c et d, elle prend toute valeur intermédiaire entre c et d.*

Ce qui est équivalent à dire : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 6.2. *L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.*

Ce qui est équivalent à dire : Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$

Les démonstrations des théorèmes **6.1** et **6.2** sont au programme du semestre 2.

Théorème 6.3. *Soit f une fonction strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$.*

1. *f est une bijection de I sur $f(I) = J$. Donc f^{-1}, fonction réciproque de f, est définie sur J et à valeurs dans I.*
2. *Si de plus f est continue, alors $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I et f^{-1} est continue, strictement monotone de même sens de variation que f.*

Remarque : Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique par rapport à la première bissectrice de celle de f.

6.4 Dérivabilité

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

6.4.1 Définitions

Définition : Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est *dérivable en x_0* si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de f en x_0*.

Proposition : f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \ I \to \mathbb{R}$ continue et nulle en x_0 telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$$

Ce qui peut s'écrire pour tout h tel que $(x_0 + h) \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 lorsqu'il existe un réel a tel que $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Donc une fonction dérivable en x_0 admet un développement limité d'ordre 1 en x_0.

Interprétation graphique et tangente

Proposition 6.4. *(à démontrer) f dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Définitions :

- f est *dérivable à droite en* x_0 si $f_{|[x_0,+\infty[\cap I}$ est dérivable, i.e. si $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ et appelée *dérivée de f à droite en x_0*. f est alors continue à droite en x_0.
- f est *dérivable à gauche en* x_0 si $f_{|]-\infty,x_0]\cap I}$ est dérivable, i.e. si $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et appelée *dérivée de f à gauche en x_0*. f est alors continue à gauche en x_0.
- Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert inclus dans I. On dit que f est *dérivable sur* $]a,b[$ si elle est dérivable en tout point x_0 de $]a,b[$.
- Soit $[a,b]$ inclus dans I. On dit que f est *dérivable sur* $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Remarque : Soit f définie sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

6.4.2 Opérations sur les dérivées

1. Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ est dérivable en x_0. On a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.
2. Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0. On a $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0. On a $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.
4. Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est dérivable en x_0. On a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
5. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. On a $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

Théorème 6.5. *Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en x_0.*
Alors l'application réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.
Dans ce cas on a : $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

6.4.3 Propriétés des fonctions dérivables

Croissance et décroissance : Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).
2. Si f vérifie $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a,b]$.
3. (sera démontré au semestre suivant) si f dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\forall x \in]a,b[\ f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a,b]$.

Extremum local : Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si f présente un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Réciproque fausse.

6.4.4 Dérivées successives

Définitions : Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les *dérivées successives de* f de proche en proche (c'est-à-dire par récurrence) par :
Pour $x_0 \in I$, $f^{(n)}(x_0)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en x_0.
On dit que f est n fois dérivable sur I si $f^{(n)}$ est définie sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On écrit alors $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

FIN DU CHAPITRE 6

Chapitre 7

Fonctions numériques usuelles

ln, exp, fonctions circulaires et hyperboliques et leurs réciproques

A peu près 5 séances de 1h20mn .

Les notations adoptées sont celles de nombreux logiciels de calcul. Il faut aussi signaler les notations comme sh et Argsh, utilisées par exemple dans certains concours nationaux.

Dans ce chapitre il s'agit :

- *de réviser les fonctions déjà connues : logarithme, exponentielle, puissances, fonctions circulaires*
- *et de découvrir de nouvelles fonctions : fonctions hyperbopliques et hyperboliques réciproques, fonctions circulaires réciproques.*

7.1 Fonctions logarithme et exponentielle (rappels)

Chacun introduit ces fonctions par la méthode de son choix.

7.1.1 Logarithme népérien

On admet l'existence du *logarithme népérien* (noté ln) (ou log), unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la dérivée est égale à $\dfrac{1}{x}$.

Propriétés :

1. ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$

A démontrer : • Pour le 2 on considère la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ qui a la même dérivée que $x \mapsto \ln x$.
• pour le 3 on utilise l'égalité $\ln 2^n = n \ln 2$

Courbe représentative.

7.1.2 Exponentielle de base e

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée *exponentielle de base* e et est notée *exp* ou $x \mapsto e^x$.

Propriétés :
- exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x\, e^y$

A démontrer.

Courbe représentative.

7.1.3 Fonctions puissances

Définition : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction *puissance* f_α par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$.
On note : $f_\alpha(x) = x^\alpha$

7.1.4 Croissances comparées

1. $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
2. $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

On peut dire que la fonction puissance impose sa limite à la fonction ln, et que la fonction exp impose sa limite à la fonction puissance.
$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$....

7.2 Fonctions circulaires et leurs réciproques

7.2.1 Fonctions circulaires

Les fonctions *sinus, cosinus et tangente* sont supposées connues.

Propriétés :
- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire.
- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.
- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, π-périodique, impaire.
- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad (\cos)'(x) = -\sin(x)$$
- La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, et : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Courbes représentatives.

7.2.2 Fonctions circulaires réciproques

Arc sinus :
La restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.
C'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, +1]$.
La bijection réciproque est appelée *Arc sinus* et est notée $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$. Par définition :
Pour tout $x \in [-1, +1]$, $\text{Arcsin}\, x$ est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ qui a pour sinus x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \text{Arcsin}\, x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin y \\ y & \in & \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Propriétés : Arcsin est impaire. Arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, +1]$.
Elle est dérivable sur $]-1, +1[$ et $(\text{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Courbe représentative.

Arc cosinus :
La restriction à $[0, +\pi]$ de la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, +\pi]$.
C'est donc une bijection de $[0, +\pi]$ dans $[-1, +1]$.
La bijection réciproque est appelée *Arc cosinus* et est notée $x \mapsto \text{Arccos}\, x$. Par définition :
Pour tout $x \in [-1, +1]$, $\text{Arccos}\, x$ est l'unique élément de $[0, +\pi]$ qui a pour cosinus x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \text{Arccos}\, x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos y \\ y & \in & [0, +\pi] \end{array}\right.$$

Propriétés : Arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, +1]$.
Elle est dérivable sur $]-1, +1[$ et $(\text{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Courbe représentative.

Arc tangente :
La restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.
Ses limites aux bornes sont $\pm\infty$.
C'est donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *Arc tangente* et est notée $x \mapsto \text{Arctan}\, x$. Par définition :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}\, x$ est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ qui a pour tangente x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \text{Arctan}\, x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \tan y \\ y & \in & \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

Propriétés : Arctan est impaire. Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Courbe représentative.

7.3 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

7.3.1 Fonctions hyperboliques

Définitions :

1. On appelle *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle de base e. C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. On appelle *tangente hyperbolique* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sinh x)'(x) = \cosh x \quad , \quad (\cosh)'x = \sinh x \quad \text{et} \quad (\tanh)'x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Tableaux de variation et courbes représentatives.

7.3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Arg sinus hyperbolique :
La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *argument sinus hyperbolique* et est notée $x \mapsto \operatorname{Arcsinh} x$.
Par définition :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arcsinh} x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}$ qui a pour sinus hyperbolique x :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \operatorname{Arcsinh} x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \sinh y \\ y & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Propriétés : Arcsinh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{Arcsinh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Courbe représentative.

Arg cosinus hyperbolique :
La restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.
La bijection réciproque est appelée *argument cosinus hyperbolique* et est notée $x \mapsto \operatorname{Arccosh} x$.
Par définition :
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{Arccosh} x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+$ qui a pour cosinus hyperbolique x :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \operatorname{Arccosh} x \\ x & \in & [1, +\infty[\end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cosh y \\ y & \in & \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

Propriétés : Arccosh est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $(\text{Arccosh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
Courbe représentative.

Arg tangente hyperbolique : (facultatif)
La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ses limites en $\pm\infty$ sont ± 1.
C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.
La bijection réciproque est appelée *argument tangente hyperbolique* et est notée $x \mapsto \text{Arctanh}\, x$.
Par définition :
Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{Arctanh}\, x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}$ qui a pour tangente hyperbolique x :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \text{Arctanh}\, x \\ x & \in &]-1, 1[\end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \tanh y \\ y & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Propriétés : Arctanh est continue et strictement croissante sur $]-1, 1[$.
Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et $(\text{Arctanh})'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.
Courbe représentative.

FIN DU CHAPITRE 7

Chapitre 8

Intégration, calcul de primitives

$\boxed{\textbf{A peu près 7 séances de 1h20mn .}}$

8.1 Introduction

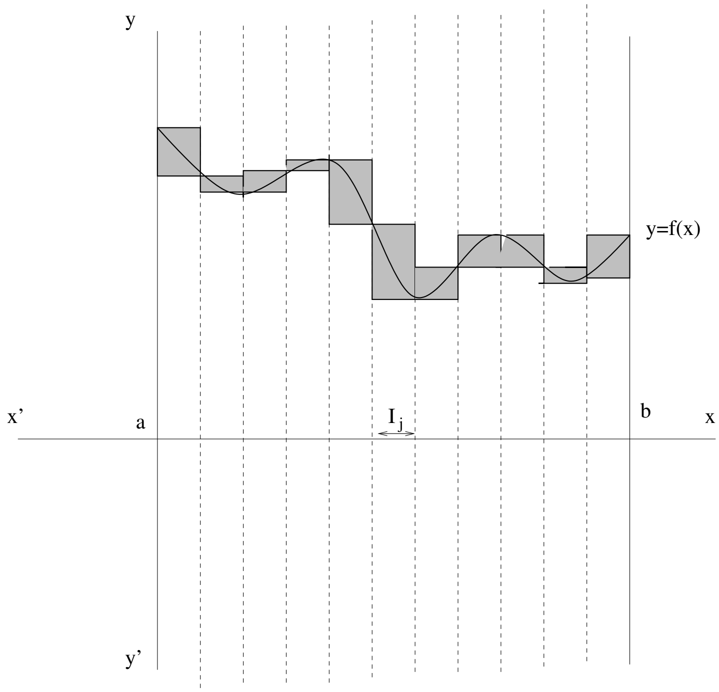
8.1.1 Définition rapide car pas au programme de ce semestre

Voir le cours d'Alain Yger sur son site

Si f est une fonction définie sur D et à valeurs dans $[0,+\infty[$, on appelle *sous-graphe* de f l'ensemble

$$\mathrm{SG}\,(f) := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R}\,;\, 0 \leq y \leq f(x)\}\,.$$

Le sous-graphe d'une fonction continue positive sur un segment $[a,b]$ est un exemple très important d'ensemble que l'on sait mesurer. Voir la figure ci-dessous :



Toute fonction réelle continue f sur un intervalle $[a,b]$ s'écrit comme la différence de deux fonctions positives continues, à savoir $f^+ := \sup(f,0)$ et $f^- := \sup(-f,0)$. Ceci nous permet de définir la notion d'intégrale de f sur $[a,b]$ (en remarquant que f s'écrit $f = f^+ - f^-$ sur $[a,b]$).

Définition : Si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on appelle *intégrale de* f sur $[a,b]$ le nombre réel

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)dt = \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^+\right)\right) - \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^-\right)\right).$$

8.1.2 Notation et formules

Notation : On convient, si $a < b$, de noter $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt$
et, si $a = b$, $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$

Formules : f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec $a<b$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt &= \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt \\
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\,,\ \forall c \in]a,b[\quad \textit{Relation de Chasles} \\
(f \geq 0 \text{ sur } [a,b]) &\Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq 0 \\
(f \leq g \text{ sur } [a,b]) &\Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \\
\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| &\leq \int_a^b |f(t)|\,dt\,.
\end{aligned}$$

8.2 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de ℝ

Définition : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient f et F deux applications définies sur I. On dit que F est une *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I et $F' = f$. F est notée : $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Théorème 8.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et soit a un point de I.*

- *Théorème fondamental de l'analyse : La fonction*

$$F\ : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

  est une primitive de f sur I ; c'est la primitive de f qui s'annule en a.
- *Pour toute primitive F_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F_0 + C\,;\, C \in \mathbb{R}\}$.*

D'où l'existence de la fonction ln admise au chapitre 7.

Corollaire. Soit f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose de plus que sa dérivée est continue sur I ($f \in \mathcal{C}^1(I)$). Si $[a,b] \subset I$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)\,.$$

Une application majeure de ce résultat :

Formule d'intégration par parties. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à dérivées continues sur I ; on a, si $[a,b] \subset I$,

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = -\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + f(b)g(b) - f(a)g(a) = -\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \Big[fg\Big]_a^b\,.$$

Autre application très importante :

Changement de variables. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit u une fonction dérivable et de dérivée continue sur $[a, b]$ à valeurs dans I. On a :

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Démonstration et exemples.

Remarque : Il n'est pas toujours possible de mettre $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$ sous la forme $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$. On se placera alors sur des intervalles où u est bijective, afin de pouvoir faire le changement de variable $t = u(x)$, calculer une primitive, puis revenir à une expression en t.

8.3 Calculs d'intégrales et calculs de primitives

Voir le fascicule d'exercices.

Remarques pour la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples :
On ne fait pas de théorie générale.

1. On admet que tout polynôme réel à coefficients réels peut se factoriser sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
   Plus précisément il existe des entiers et des réels uniques tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(x) = \lambda(x-a_1)^{m^1} \cdots (x-a_p)^{m^p}(x^2+b_1x+c_1)^{n^1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{n^q}$$

   où $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ sont les racines réelles de D, et $(x^2+b_jx+c_j)_{1\leq j\leq q}$ des polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
2. On se restreint à des fractions rationnelles $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $\deg N < \deg D$, et, dans les cas les plus complexes : $D(x) = (x-a_1)(x-a_2)^2(x-a_3)^3(x^2+bx+c)$ (ce dernier ayant un discriminant < 0).
3. On admet qu' il existe alors des constantes uniques telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\alpha}{x-a_1} + \frac{\beta_1}{x-a_2} + \frac{\beta_2}{(x-a_2)^2} + \frac{\gamma_1}{x-a_3} + \frac{\gamma_2}{(x-a_3)^2} + \frac{\gamma_3}{(x-a_3)^3} + \frac{\delta_1 x+\delta_2}{x^2+bx+c}$$

FIN DU CHAPITRE 8

Chapitre 9

Equations différentielles

Equations différentielles linéaires d'ordre 1, équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$\boxed{\textbf{A peu près 6 séances de 1h20mn .}}$

9.1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

y désigne une fonction d'une variable réelle notée t.

Définitions :
- On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre* n une relation liant une fonction dérivable n fois à ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n, de la forme :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

- On appelle *solution* de (E) sur I une fonction y dérivable n fois sur I qui vérifie (E) sur I.
- On appelle *solution de l'équation homogène* (ou encore *solution de l'équation sans second membre*) (E_0) une solution de l'équation différentielle $y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = 0$
- Résoudre sur I l'équation différentielle (E) signifie chercher les solutions de E sur I.

Proposition : Si y_1 et y_2 sont solutions de (E_0) alors, pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de (E_0).

Proposition : Toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de l'équation sans second membre associée.

Principe de superposition des solutions :

9.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

9.2.1 Généralités

Théorème 9.1. *L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ est l'ensemble des fonctions y de la forme : $y(t) = Ce^{A(t)}$, où A est une primitive de a.*

Théorème 9.2. *Le problème de cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)y(t) \quad \forall t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

admet une solution unique : $y(t) = y_0 e^{A(t)}$ *où* A *est la primitive de* a *qui s'annule en* t_0*. C'est-à-dire :*

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

9.2.2 Résolution :

Une solution de l'équation $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation.
Une solution particulière est soit évidente, soit obtenue par la méthode dite de la *variation de la constante.*

9.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

9.3.1 Généralités

Définitions : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, a, b, c trois nombres réels ($a \neq 0$), f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

1. Chercher une fonction y définie et deux fois dérivable dans I telle que

$$\forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad (E)$$

s'appelle *résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* (E) *sur* I

2. Soient t_0 un point de I, y_0 et v_0 deux réels. Chercher les solutions y de (E) obéissant aux deux conditions

$$y(t_0) = y_0\,,\ y'(t_0) = v_0$$

s'appelle *résoudre le problème de Cauchy linéaire du second ordre*

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= f(t) \quad \forall t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= v_0 \quad , \end{cases}$$

près de t_0
Les conditions $y(t_0) = y_0\,,\ y'(t_0) = v_0$ étant appelées conditions initiales.

Théorème de Cauchy pour les équations linéaires du second ordre à coefficients constants : Le problème de Cauchy précédent admet une et une seule solution $y\ : I \longmapsto \mathbb{R}$ définie sur I tout entier et deux fois dérivable sur I.

9.3.2 Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

Equation caractéristique : C'est l'équation du second degré : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Proposition : Les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ se calculent à partir des racines de l'équation caractéristique :

1. Si elle a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, les solutions sont de la forme : $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x}$ où α_1 et α_2 sont deux réels.
2. Si elle a une racine double λ, les solutions sont de la forme : $y(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{\lambda x}$
3. Si elle a deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$, les solutions sont de la forme : $y(x) = (\alpha_1 \cos \mu x + \alpha_2 \sin \mu x)e^{\lambda x}$

9.3.3 Résolution de $ay'' + by' + cy = f$

Une solution de l'équation $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de cette équation.
On ne fait pas de variation des constantes.
On ne fait des exercices que dans le cas où le second membre comporte un produit des fonctions exponentielle, polynôme, sin ou cos.

FIN DU CHAPITRE 9

Chapitre 10

Fonctions de 2 ou 3 variables réelles

Notion de dérivées partielles, définition et calcul du gradient, de la divergence et du rotationnel

$\boxed{\textbf{A peu près 3 séances de 1h20mn .}}$

L'objectif de ce chapitre est le calcul des dérivées partielles premières des fonctions réelles de 2 *ou* 3 *variables réelles.*

10.1 Rappels et compléments

Produit scalaire : Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) appelés vecteurs. On appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le réel (appelé aussi *scalaire*) défini par :

$$\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Norme euclidienne : Le réel $\sqrt{\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{u}}$ est appelé la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$. On le notera $\|\overrightarrow{u}\|$ dans la suite. On a donc : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Produit vectoriel : On considère un repère orthonormal direct $\left(O, \ \overrightarrow{i}, \ \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On appelle *produit vectoriel de* $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le vecteur :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\,\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\,\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\,\overrightarrow{k}.$$

Ce vecteur est indépendant du repère orthonormal direct.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$; le repère $(O, \ \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{w})$ est direct.

Ouvert : Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $(a, b) \in D$ il existe un disque de centre (a, b) et de rayon $r > 0$ inclus dans D.

Fonction de 2 **ou** 3 **variables réelles** : On considère dans la suite une fonction f définie sur une partie D ouverte de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs réelles qui fait correspondre à tout $X = (x, y, z) \in D$ un réel unique noté $f(X)$ ou $f(x, y, z)$.

Continuité : La notion de continuité vue pour les fonctions d'une variable s'étend aux fonctions de plusieurs variables. L'application $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en $(a, b) \in D$ si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $f(a, b)$ contient toutes les valeurs de $f(x, y)$ pour (x, y) assez voisin de (a, b). On peut exprimer cette notion de continuité avec des quantificateurs comme on l'a fait pour les fonctions d'une variable.

Dans $\mathbb{R}^2$ on énonce les définitions précédentes avec $\overrightarrow{u} = (x, y)$.

10.2 Dérivées partielles de fonctions de 2 ou 3 variables réelles

Pour simplifier l'écriture, les définitions et les résultats seront énoncés dans le cas de deux variables.

10.2.1 Dérivées partielles premières

On considère une fonction f définie sur une partie D ouverte de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

Définition :

– La *dérivée partielle de* f (ou encore *la dérivée partielle première de* f) par rapport à x (ou encore *par rapport à la première variable*) en (x_0, y_0) est la dérivée en x_0 de la fonction :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \; = \; \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \; ,$$

– De même : La *dérivée partielle de* f (ou encore *la dérivée partielle première de* f) par rapport à y (ou encore *par rapport à la seconde variable*) en (x_0, y_0) est la dérivée en y_0 de la fonction :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \; = \; \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \; ,$$

Remarques :

– Les opérations algébriques sur les dérivées de fonctions d'une variable sont applicables.
– Les dérivées partielles ne caractérisent pas complètement la fonction « au voisinage »de (x_0, y_0).
– L'existence de dérivées partielles en un point n'implique même pas la continuité en ce point.
– L'existence de dérivées partielles continues permet de « linéariser »la fonction « au voisinage »d'un point.

10.3 Gradient, divergence, rotationnel

10.3.1 Vocabulaire

On appelle :

– *fonction scalaire* (ou *champ scalaire*) toute application définie sur une partie D ouverte de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs réelles.
– *champ de vecteurs* toute application définie sur une partie D ouverte de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

Pour un champ de vecteurs les éléments de l'ensemble de départ D sont considérés comme des points, et les éléments de l'espace d'arrivée comme des vecteurs.
Dans le cas de l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ peut s'écrire :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

Où P, Q, R sont des fonctions scalaires. **Dessin et exemple :** Carte des vents sur la France, etc....

Nous dirons que la fonction scalaire f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur D si elle admet des dérivées partielles premières en tout point de D, et si celles-ci sont continues sur D.
Nous dirons que le champ de vecteur est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur D si P, Q et R admettent des dérivées partielles premières en tout point de D, et si celles-ci sont continues sur D.

10.3.2 Gradient d'une fonction scalaire

Définitions : Soit une fonction f définie sur une partie D ouverte de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) et à valeurs réelles.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Le *gradient* de f au point $(x_0, y_0, z_0) \in D$ est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières de f :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\overrightarrow{k}$$

   On note aussi : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$

Linéarité : Soient deux fonctions f et g définies sur D et soient λ et μ deux réels. On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f + \mu\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g$$

10.3.3 Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs

Définitions : Soit $\overrightarrow{V}(M)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$).

1. Sa divergence au point $M(x,y,z)$ est le scalaire :

$$\text{div}\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

   On admet que ce réel ne dépend pas du repère orthonormal choisi.
   Formellement, l'opérateur divergence appliqué à un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est défini par : $\overrightarrow{\nabla}\,.\,\overrightarrow{V}$

2. Son rotationnel au point $M(x,y,z)$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

   On admet que ce vecteur ne dépend pas du repère orthonormal choisi.
   Formellement, l'opérateur rotationnel appliqué à un champ vectotiel $\overrightarrow{V}$ est défini par : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$

Linéarité : Si $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont deux champs de vecteurs définis sur D, et λ et μ deux réels, on a :

$$\text{div}(\lambda\overrightarrow{V_1} + \mu\overrightarrow{V_2}) = \lambda\,\text{div}(\overrightarrow{V_1}) + \mu\,\text{div}(\overrightarrow{V_2})$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda\overrightarrow{V_1} + \mu\overrightarrow{V_2}) = \lambda\,\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V_1} + \mu\,\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V_2}$$

FIN DU CHAPITRE 10