Contrôle optimal par réduction de dynamique du sillage instationnaire d’un cylindre circulaire

Michel Bergmann, Laurent Cordier et Jean-Pierre Brancher

Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Laboratoire d’Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la Forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre Cedex, France

Plan de l’exposé

I - Configuration d’étude et méthode de résolution numérique

II - Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

III - Modèle réduit de la dynamique contrôlée du cylindre

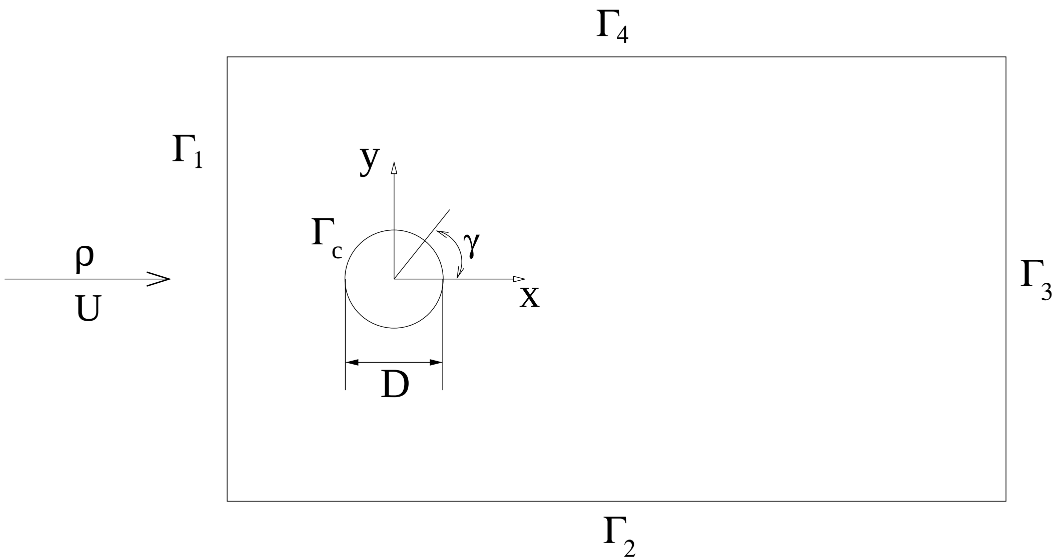
IV - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

V - Contrôle actif en boucle fermée

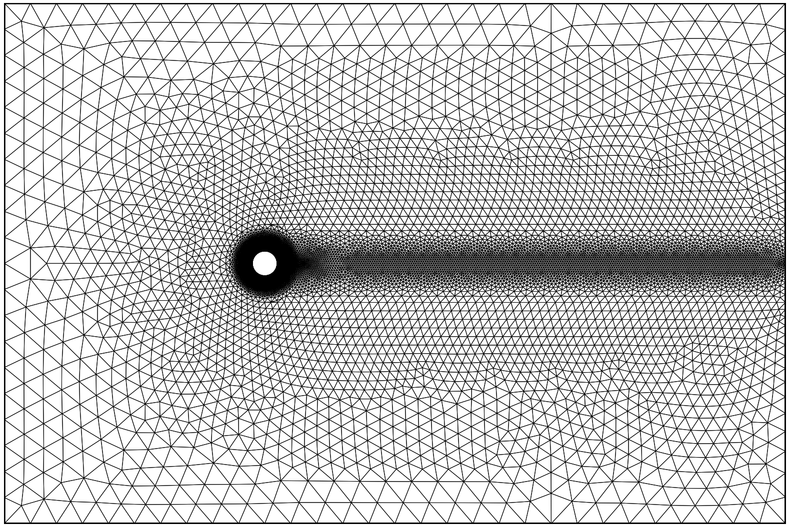
Conclusions et perspectives

I - Configuration d’étude et méthode de résolution numérique

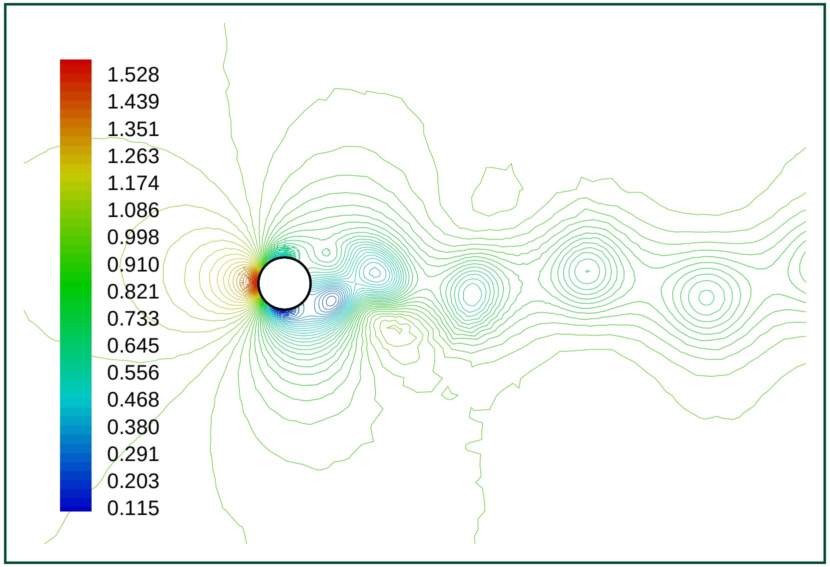
- Écoulement 2D en aval d’un cylindre circulaire à $R_e = 200$,
- Fluide visqueux, incompressible, Newtonien,
- Oscillation du cylindre à la vitesse tangentielle $\gamma(t)$.



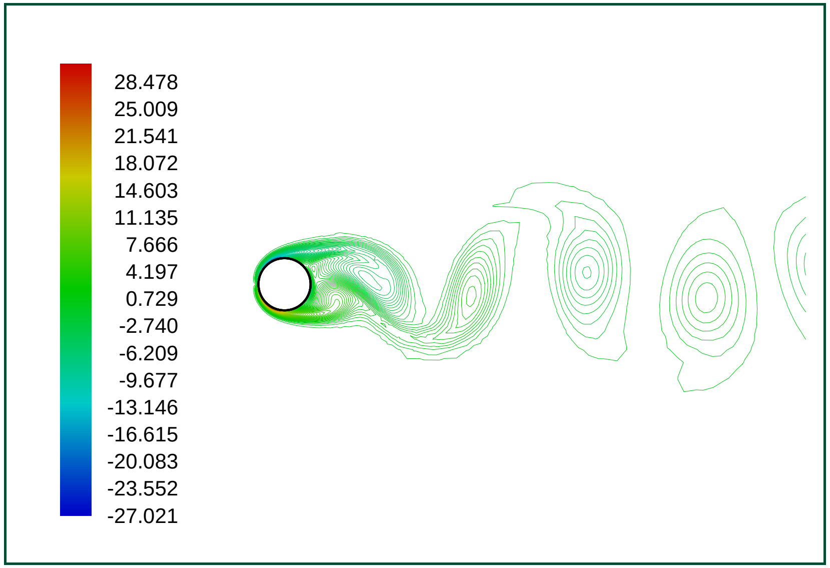
- Méthode à pas fractionnaires (correction de pression),
- Éléments finis P_1.



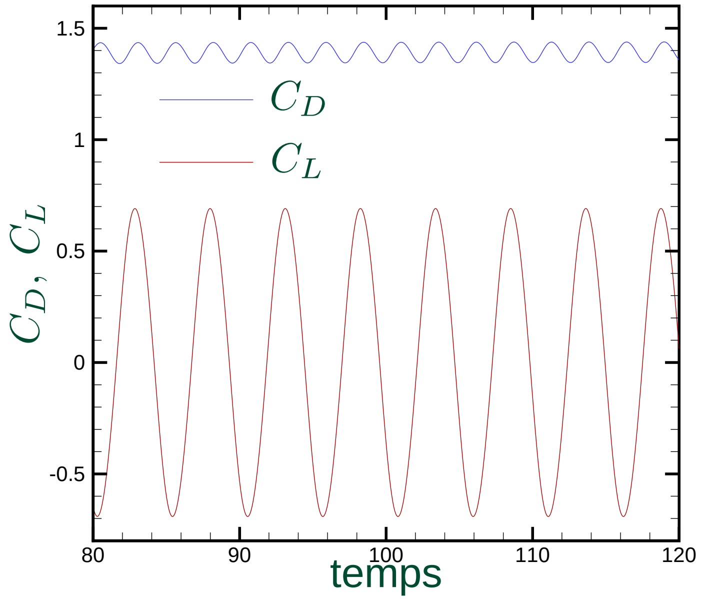
I - Configuration d’étude et méthode de résolution numérique



Isobars à $t = 100$.



Iso-rotationnels à $t = 100$.



Coefficients aérodynamiques.

Auteurs	S_t	C_D
Braza *et al.* (1986)	0.2000	1.4000
Henderson *et al.* (1997)	0.1971	1.3412
He *et al.* (2000)	0.1978	1.3560
présente étude	**0.1983**	**1.3822**

Nombre de Strouhal et coefficient de traînée.

II - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

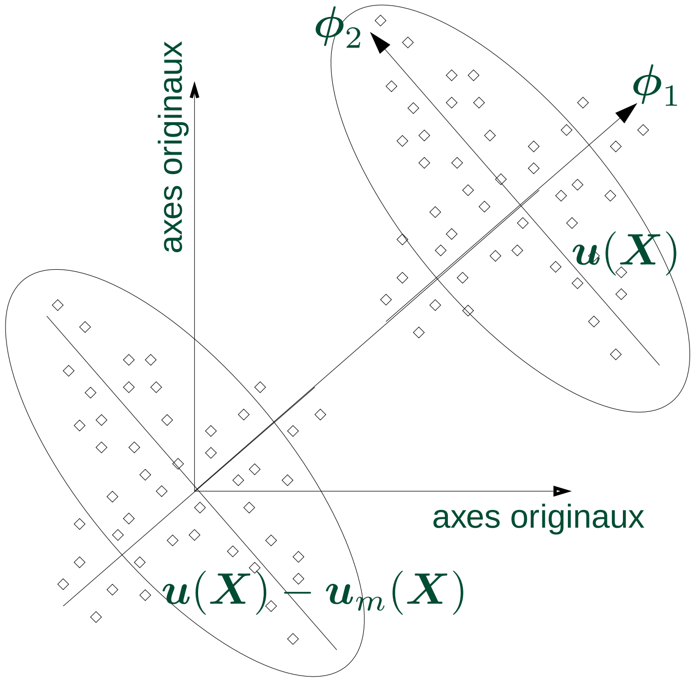
▶ Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967).

▶ Rechercher la réalisation $\phi(\boldsymbol{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$. ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$)

▶ $\phi(\boldsymbol{X})$ solution du problème :

$$\max_{\boldsymbol{\phi}} \frac{\langle |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi})|^2 \rangle}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}.$$

▶ Convergence optimale *en norme* L^2 (énergie) de $\phi(\boldsymbol{X})$
$\Rightarrow$ réduction de dynamique envisageable.



Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.

II - Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

- Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

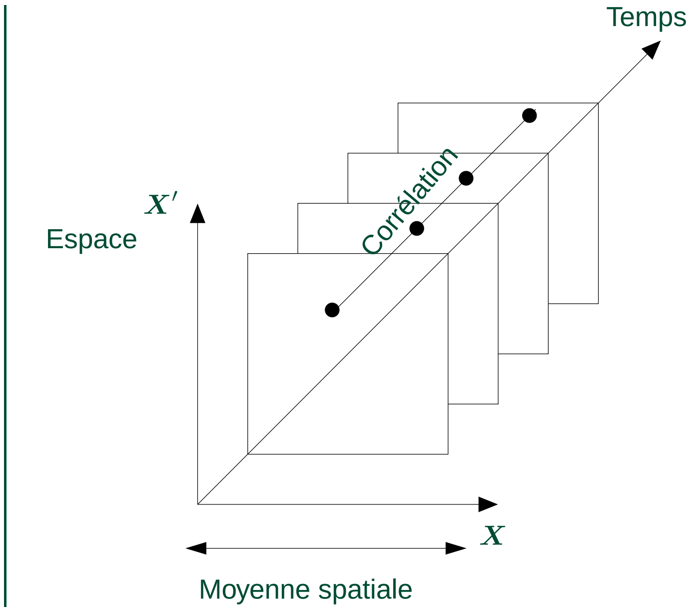
$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'})\phi_j^{(n)}(\boldsymbol{X'})\, d\boldsymbol{X'} = \lambda^{(n)}\phi_i^{(n)}(\boldsymbol{X}) \qquad n = 1, .., N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'})$: *tenseur des corrélations spatio-temporelles.*

- Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t, t')a^{(n)}(t')\, dt' = \lambda^{(n)}a^{(n)}(t)$$

$\hookrightarrow C(t, t')$: *corrélations temporelles.*



- $\phi(\boldsymbol{X})$ base de l'écoulement :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t)\boldsymbol{\phi}^{(n)}(\boldsymbol{x}).$$

Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N$^{\circ}$ 3, pp. 561–571.

III - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Projection de Galerkin de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left(\boldsymbol{\phi}^{(i)},\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = \left(\boldsymbol{\phi}^{(i)},\, -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}\right).$$

- Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\phi}^{(i)},\, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) &= \left(p,\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\phi}^{(i)}\right) - \frac{1}{Re}\left((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\phi}^{(i)})^T,\, \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}\right) \\ &\quad - [p\, \boldsymbol{\phi}^{(i)}] + \frac{1}{Re}[(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u})\boldsymbol{\phi}^{(i)}].\end{aligned}$$

avec $[\boldsymbol{a}] = \int_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma$ et $(A,\, B) = \int_\Omega A : B\, d\Omega = \sum_{i,\, j} \int_\Omega A_{ij} B_{ji}\, d\Omega$.

III - Modèle réduit de la dynamique du cylindre

- Décomposition de la vitesse sur N_{POD} modes :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}) + \gamma(t)\,\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a^{(k)}(t)\boldsymbol{\phi}^{(k)}(\boldsymbol{x}).$$

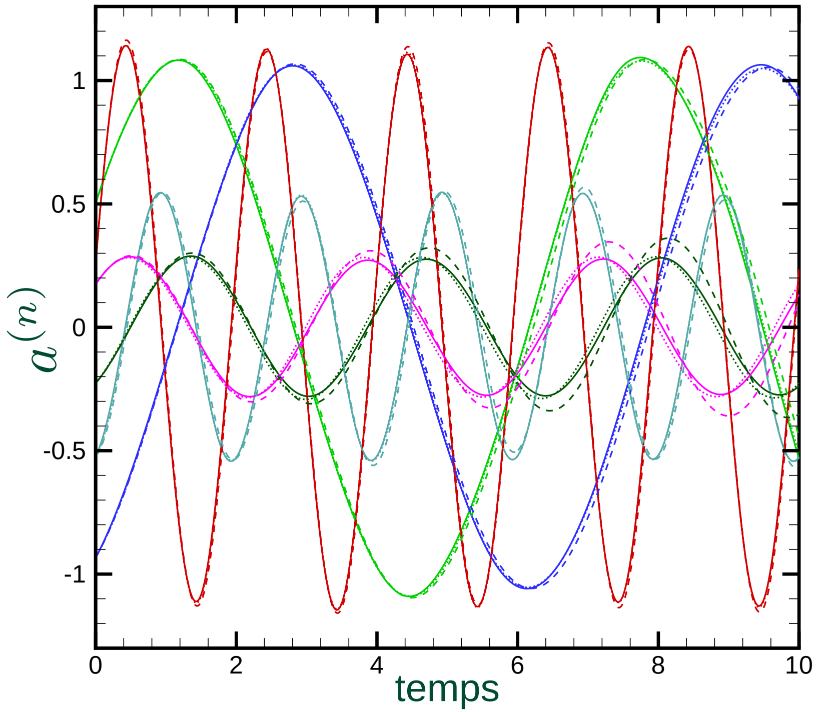
- Système dynamique avec N_{gal} modes retenus (équations d'état) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\,a^{(i)}(t)}{d\,t} =& \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij}\,a^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}}\sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk}\,a^{(j)}(t)a^{(k)}(t) \\ & + \mathcal{D}_i\,\frac{d\,\gamma}{d\,t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij}\,a^{(j)}(t)\right)\gamma + \mathcal{G}_i\gamma^2 \\ a^{(i)}(0) =& (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\,0),\,\boldsymbol{\phi}^{(i)}(\boldsymbol{x})). \end{aligned} \right.$$

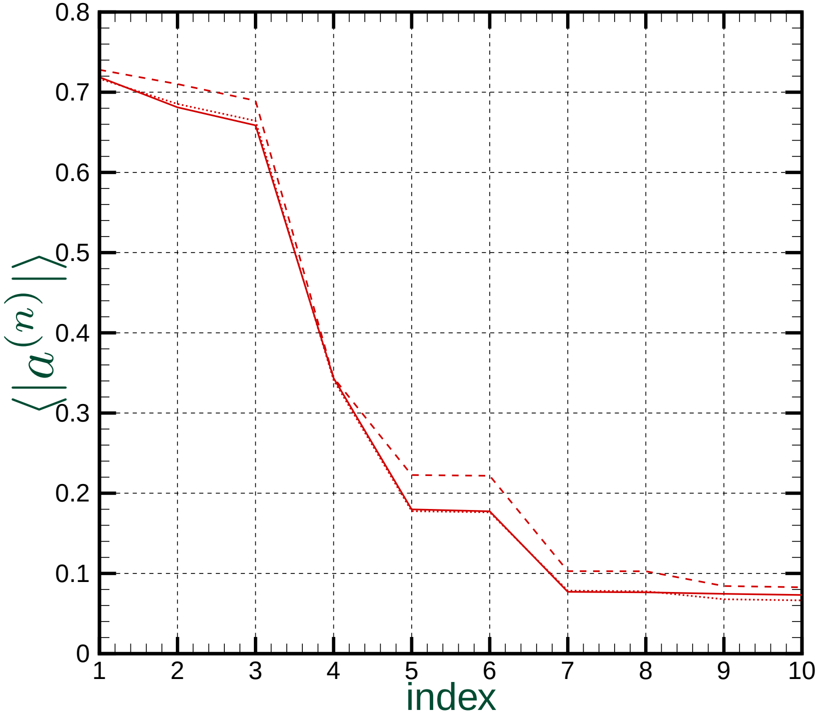
$\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ijk}$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_{ij}$ et $\mathcal{G}_i$ dépendent de $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_c$ et Re.

III - Modèle réduit de la dynamique du cylindre *Stabilisation*

Intégration et stabilisation du système dynamique POD pour
$\gamma = A\sin(2\pi S_t t)$, $A = 2$ et $S_t = 0,5$.



Evolution temporelle des 6 premiers modes propres POD.



Amplitudes moyennes des modes POD.

— modes projetés (exacts) ; - - - modes prédits ; $\cdots$ modes stabilisés.

IV - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

- Fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{a},\gamma(t)) = \int_0^T J(\boldsymbol{a},\gamma(t))\,dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} {a^{(i)}}^2 + \frac{\alpha}{2}\gamma(t)^2\right)\,dt.$$

α : paramètre de régularisation (pénalisation).

- Equations adjointes :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\xi^{(i)}(t)}{dt} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N_{gal}}\left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(t)\,\mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}}\left(\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}\right)a^{(k)}(t)\right)\xi^{(j)}(t) - 2a^{(i)}(t) \\ \xi^{(i)}(T) = 0. \end{cases}$$

- Condition d'optimalité :

$$\delta\gamma(t) = -\sum_{i=1}^{N_{gal}}\mathcal{D}_i\frac{da^{(i)}}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}}\left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}}\mathcal{F}_{ij}a^{(j)} + 2\mathcal{G}_i\gamma(t)\right)\xi^{(i)} + \alpha\gamma.$$

IV - Formulation contrôle optimal appliquée au modèle réduit

- $\gamma^{(0)}(t)$ fixé ; Pour $n = 0, 1, 2,$ ... et tant que critère de convergence non vérifié Faire :

1. Résolution de 0 à T des équations d'état avec $\gamma^{(n)}(t)$;
   $\hookrightarrow$ *on obtient* $a^{(n)}(t)$
2. Résolution de T à 0 des équations adjointes avec $a^{(n)}(t)$;
   $\hookrightarrow$ *on obtient* $\xi^{(n)}(t)$
3. Résolution des conditions d'optimalité avec $a^{(n)}(t)$ et $\xi^{(n)}(t)$ de 0 à T (ou de T à 0) ;
   $\hookrightarrow$ *on obtient* $\delta\gamma^{(n)}(t)$
4. Nouveau contrôle $\hookrightarrow \gamma^{(n+1)}(t) = \gamma^{(n)}(t) + \omega^{(n)}\,\delta\gamma^{(n)}(t)$

- Fin Faire.

V - Contrôle actif en boucle fermée *Généralités*

► Pas de réactualisation de la base POD.

► Représentativité énergétique *a priori* différente de représentativité dynamique :

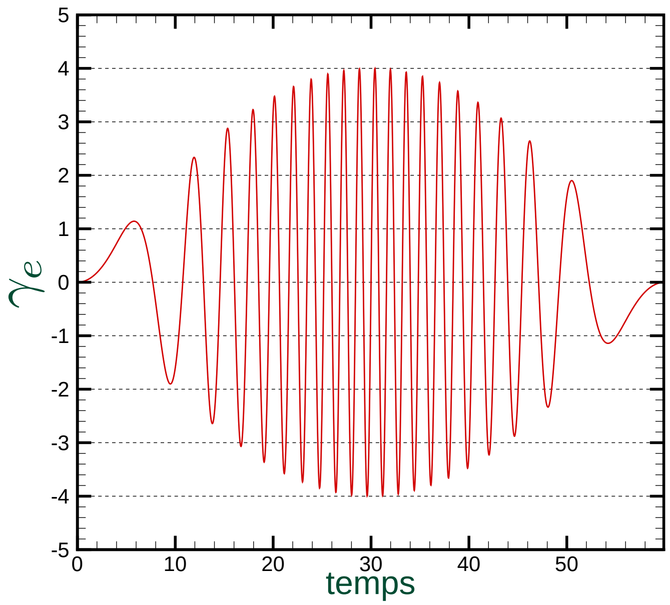
$\hookrightarrow$ inconvénient possible pour le contrôle.

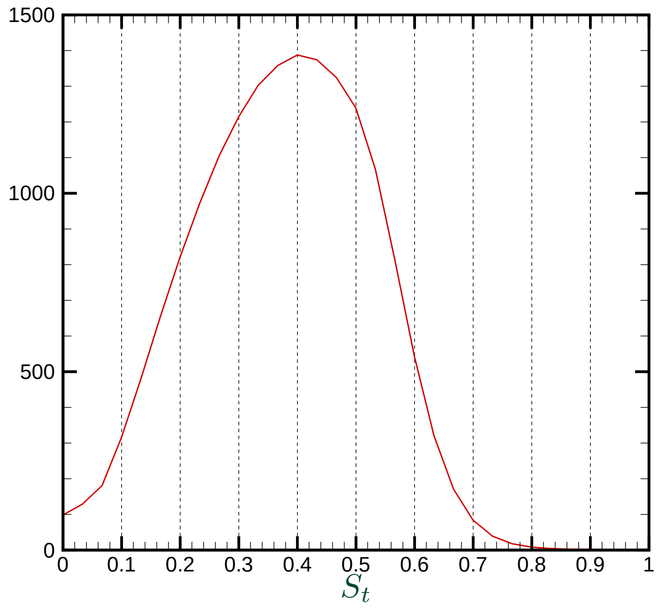
$\hookrightarrow$ un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer.

► Construction d'une base POD représentative d'une plus large gamme de dynamique :

$\hookrightarrow$ *excitation d'un plus grand nombre de degrés de liberté par balayage en amplitudes et en fréquences de* $\gamma(t)$.

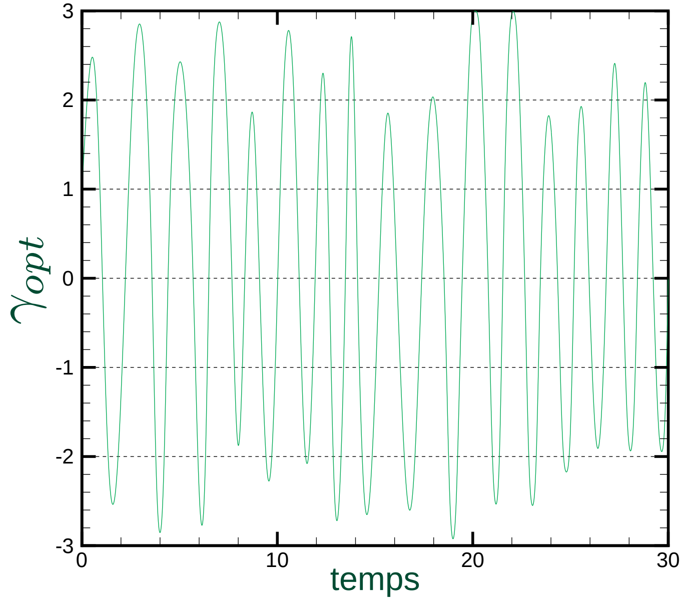
V - Contrôle actif en boucle fermée *Excitation*

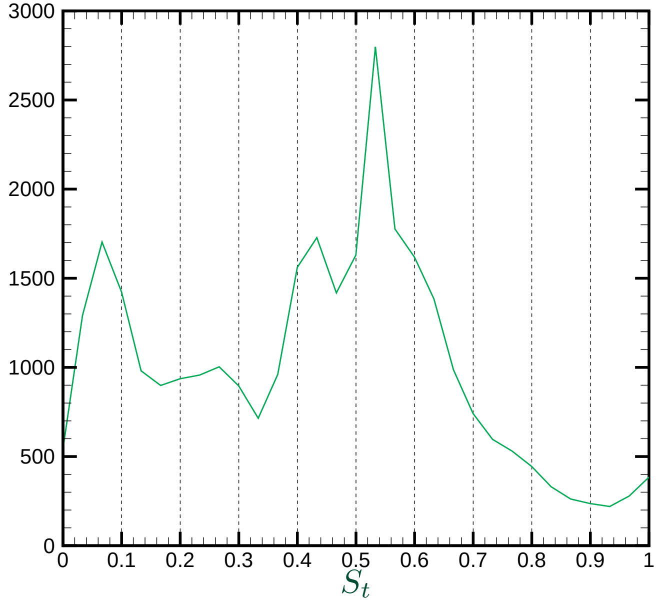




- $\gamma = 0$:
  $\hookrightarrow$ 2 *modes sur 100 nécessaires pour représenter* 97% *de l'énergie.*

- $\gamma = \gamma_e$:
  $\hookrightarrow$ 30 *modes sur 100 nécessaires pour représenter* 97% *de l'énergie.*





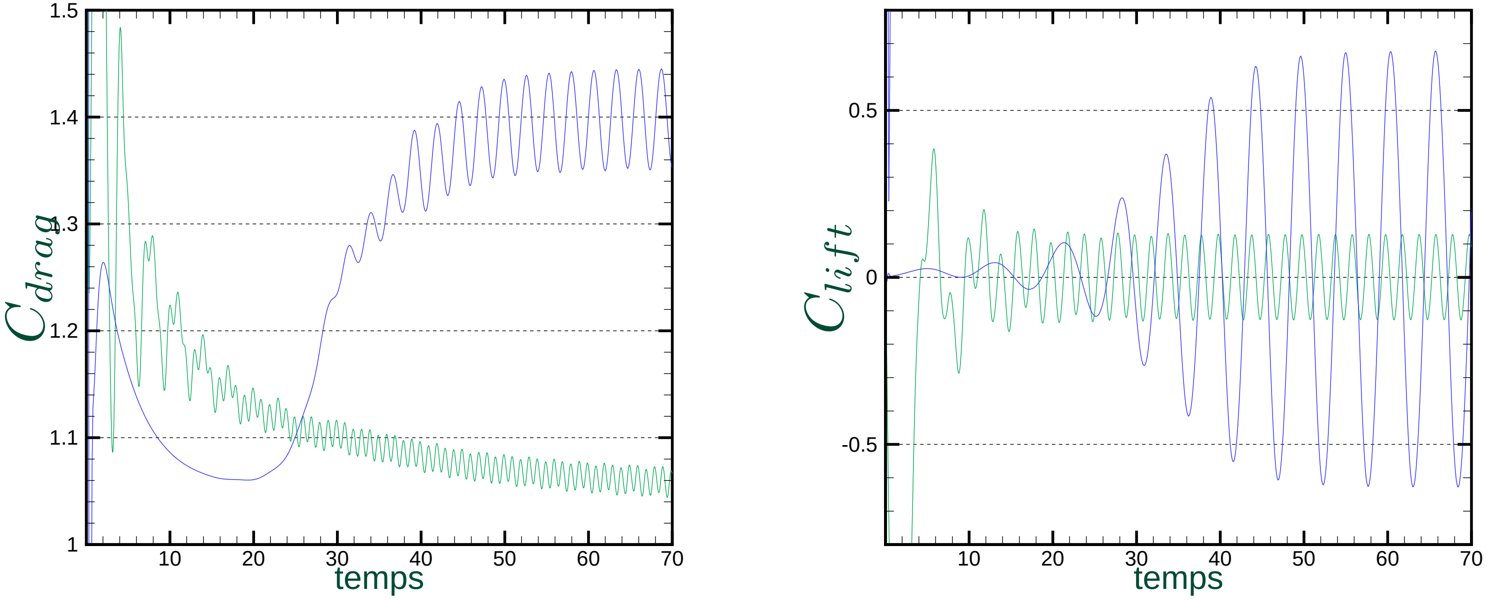
- ▶ Diminution très importante de l'instationnarité du sillage. $\gamma_{opt} \simeq A \sin(2\pi S_t t)$ avec $A = 2,2$ et $S_t = 0,53$

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 9,81 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\gamma_{opt}) = 5,63.$$

- ▶ Le contrôle est optimal pour le système POD.
- ▶ Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

V - Contrôle actif en boucle fermée

▶ Aucune preuve d'optimalité pour Navier-Stokes.



▶ Diminution très importante de la traînée :

$C_D = 1,38$ pour $\gamma = 0$ et $C_D = 1,06$ pour $\gamma = \gamma_{opt}$.

▶ Diminution de l'amplitude de la portance :

$C_L = 0,68$ pour $\gamma = 0$ et $C_L = 0,13$ pour $\gamma = \gamma_{opt}$.

Conclusions et perspectives

▶ Conclusions

- Objectifs atteints : diminution de la traînée via la minimisation de l'instationnarité du sillage du modèle réduit.

▶ Perspectives

- Améliorer la représentativité du modèle POD.
  $\hookrightarrow$ "Optimiser" l'excitation temporelle γ_e,
  $\hookrightarrow$ Mélanger des snapshots correspondants à plusieurs excitations temporelles.
- Recherche d'un contrôle périodique $\gamma(t) = A \sin(2\pi\, S_t\, t)$ avec réactualisation de la base POD (premiers résultats encourageants).
- Couplage avec des méthodes d'optimisation à régions de confiance (TRPOD) $\Longrightarrow$ prouver convergence.
- Coupler la pression au modèle POD.
- Contrôle optimal de Navier-Stokes.