

Amélioration de la robustesse de modèles réduits POD & application au contrôle d'écoulement.

Michel Bergmann

`Michel.Bergmann@inria.fr`
`http://www.math.u-bordeaux.fr/~bergmann/`

Institut de Mathématiques de Bordeaux - Université Bordeaux 1

351 cours de la Libération

33405 TALENCE cedex, France

Plan de l'exposé

Introduction

I - Etude paramétrique

II - Méthodes mathématiques

La théorie du contrôle optimal

Réduction de modèle par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

III - Optimisation *sans* réactualisation de la base POD

IV - Optimisation *avec* réactualisation de la base POD

Méthode adaptative

Méthode à région de confiance

V - Observations et améliorations

VI - Amélioration du modèle réduit

Conclusions et perspectives

Introduction *Contexte et objectifs de l'étude*

Optimisation aérodynamique interne et externe avion par *contrôle des écoulements* :
↳ **enjeu majeur pour développement transport aéronautique**

▷ **Optimisation aérodynamique**

- Augmentation de l'autonomie en vol
- Diminution de la masse au décollage
↳ Réduction des coûts opérationnels
- Réduction de l'émission de gaz polluant
- Réduction de la nuisance sonore
- Gain de manœuvrabilité

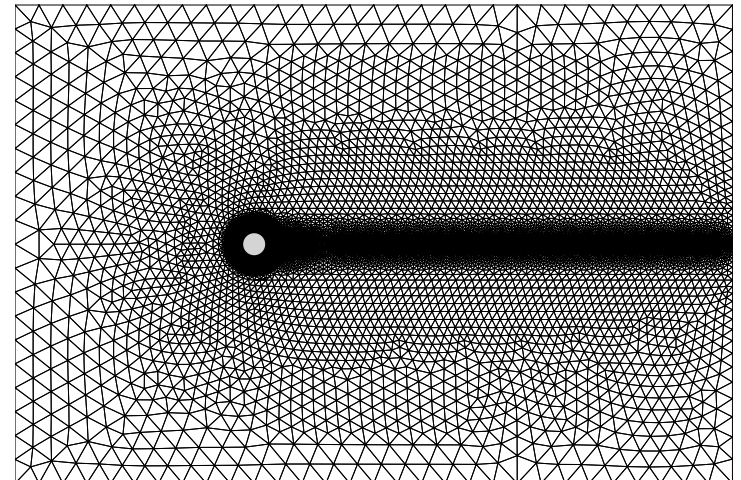
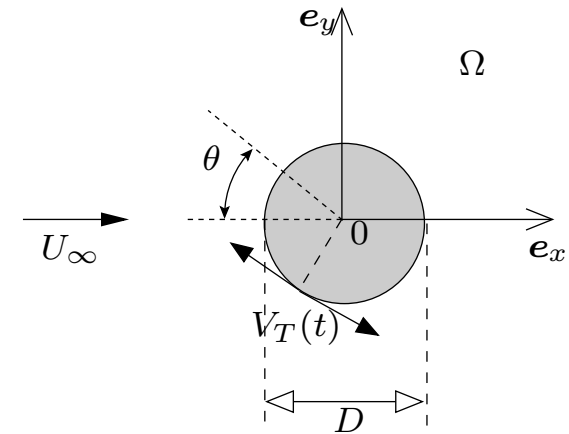
▷ **Exemple chiffré**

- Réduction 1% consommation mondiale de fuel pour le transport aéronautique
↳ gain de dépense de 1,25 millions de dollars par jour en coût opérationnel (valeur en 2002)

Introduction Configuration & méthode résolution

LEMTA - L. Cordier & J.-P. Brancher

- ▷ **Prototype écoulement décollé**
 - Cylindre circulaire 2D à $Re = 200$
 - Fluide visqueux, incompressible
- ▷ **Rotation cylindre : vitesse tangentielle $V_T(t)$**
- ▷ **Méthode à pas fractionnaires en temps**
 - Correction de pression
- ▷ **Éléments finis (P_1, P_1) en espace**

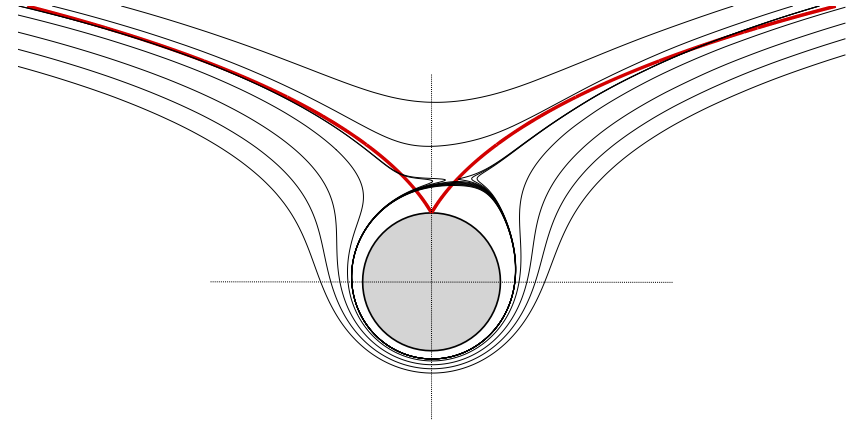


Code de calcul développé par M.Braza et D. Ruiz (IMFT-ENSEEIHT).

Introduction *Rotation à vitesse constante*

Rotation constante : $V_T(t) = V_0 U_\infty$

- ▷ Observations numériques,
 - Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
 - Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \rightarrow 0$.
- ▷ Analytiquement, $V_0 = 3,1$
[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]



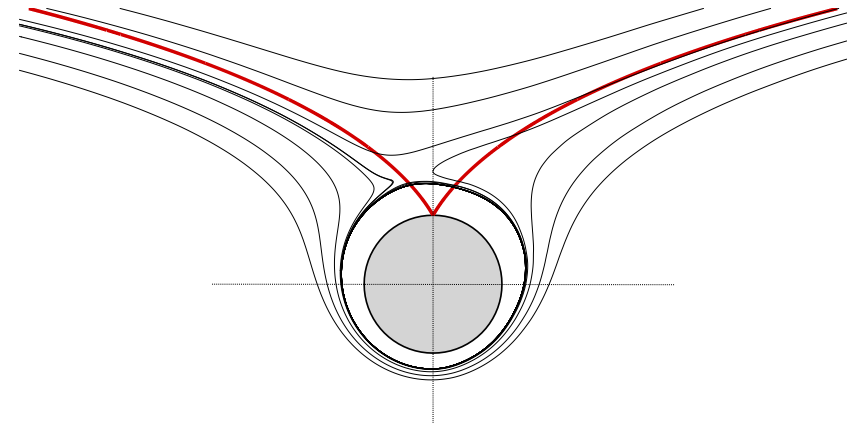
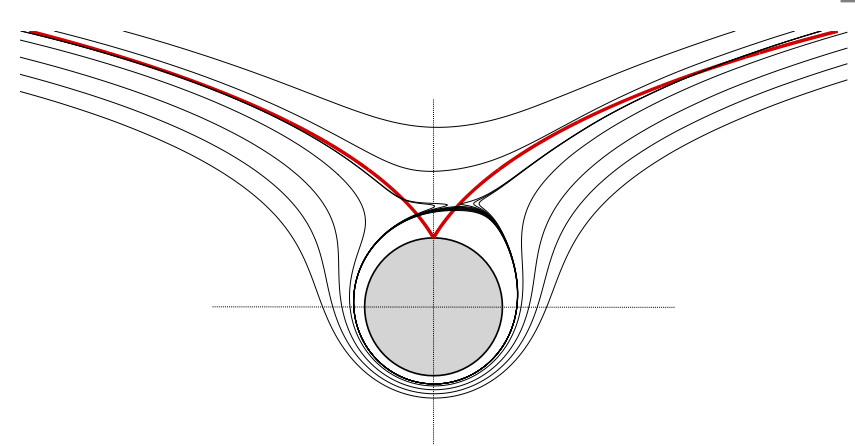
Introduction *Rotation à vitesse constante*

Rotation constante : $V_T(t) = V_0 U_\infty$

- ▷ Observations numériques,
 - Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
 - Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \rightarrow 0$.
- ▷ Analytiquement, $V_0 = 3,1$
[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]

Contrôle appliqué sur $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$

- ▷ Forme de Von Mises des éqs. de CL
[Batchelor, JFM, 1956]
- ▷ Circulation $\Gamma = 2\pi R V_0 \sqrt{\frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{\pi}}$
 - $100^\circ \leq \theta_c \leq 160^\circ \Rightarrow V_c = \sqrt{3}V_0$



Introduction *Rotation à vitesse constante*

Rotation constante : $V_T(t) = V_0 U_\infty$

- ▷ Observations numériques,
 - Si $V_0 = 3,6$ un seul point d'arrêt
 - Si $V_0 \geq 3,6$ plus de sillage, $C_D \rightarrow 0$.
- ▷ Analytiquement, $V_0 = 3,1$
[Glauert, Proc. Roy. Soc., 1954]

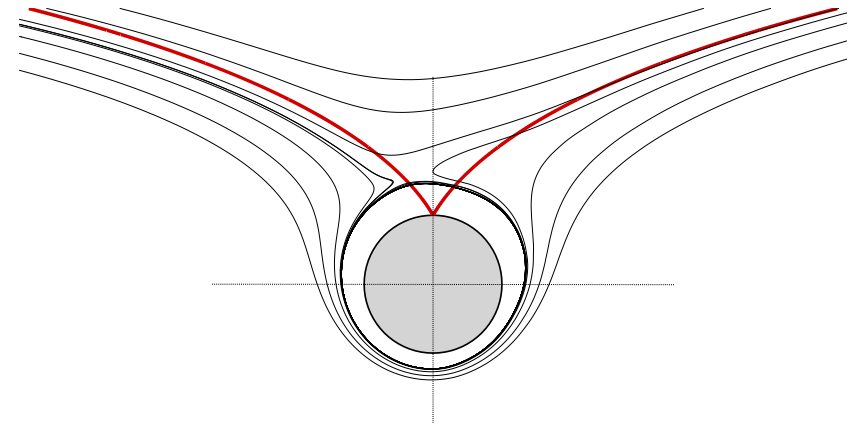
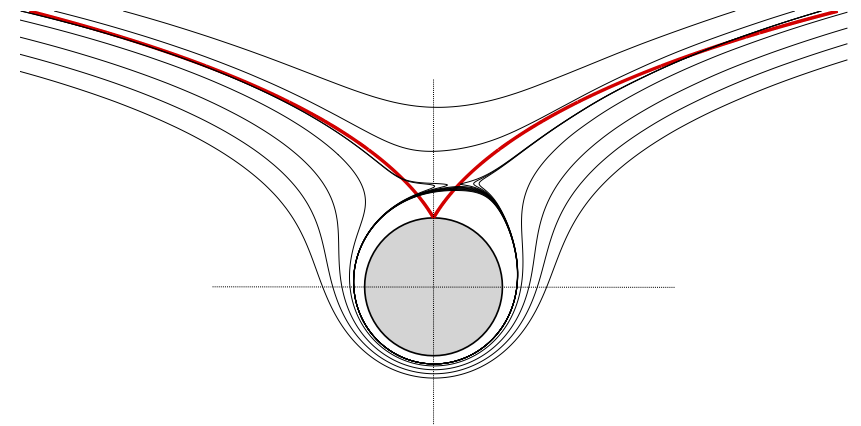
Contrôle appliqué sur $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$

- ▷ Forme de Von Mises des éqs. de CL
[Batchelor, JFM, 1956]
- ▷ Circulation $\Gamma = 2\pi R V_0 \sqrt{\frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{\pi}}$
 - $100^\circ \leq \theta_c \leq 160^\circ \Rightarrow V_c = \sqrt{3}V_0$

Réduction de traînée due au déplacement du point d'arrêt

- ▷ Rotation sinusoïdale $\gamma(t) = \frac{V_T(t)}{U_\infty} = A \sin(2\pi St_f t)$: point d'arrêt reste fixe à $\theta = 0^\circ$.

Déterminer A et St_f qui minimisent la traînée (sans considérations énergétiques)



Introduction *Ecoulement de base stationnaire instable*

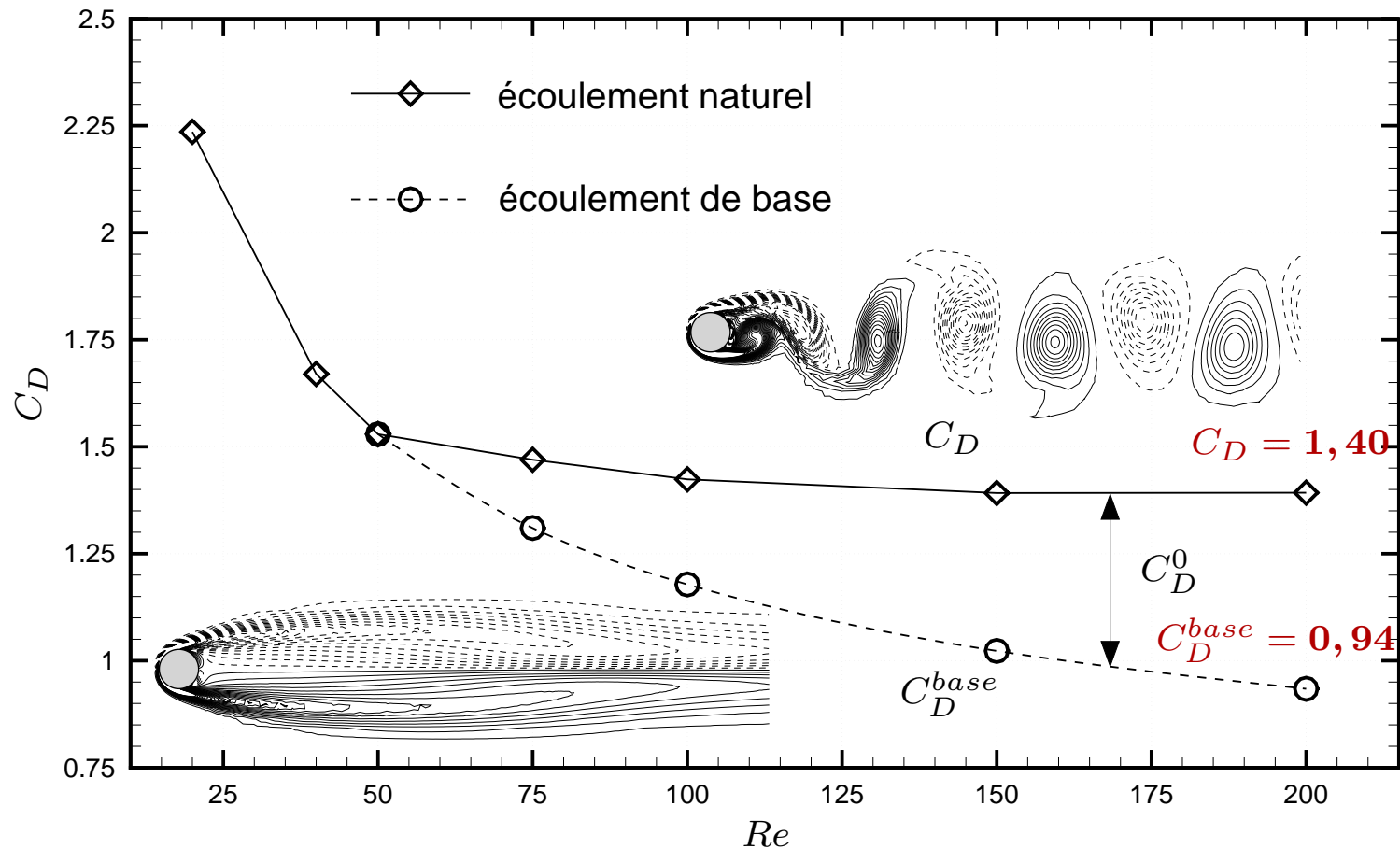


Fig. : Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre l'écoulement naturel et l'écoulement de base stationnaire instable.

Protas, B. et Wesfreid, J.E. (2002) : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14**(2), pp. 810-826.

I - Etude paramétrique *Coefficient de traînée moyen*

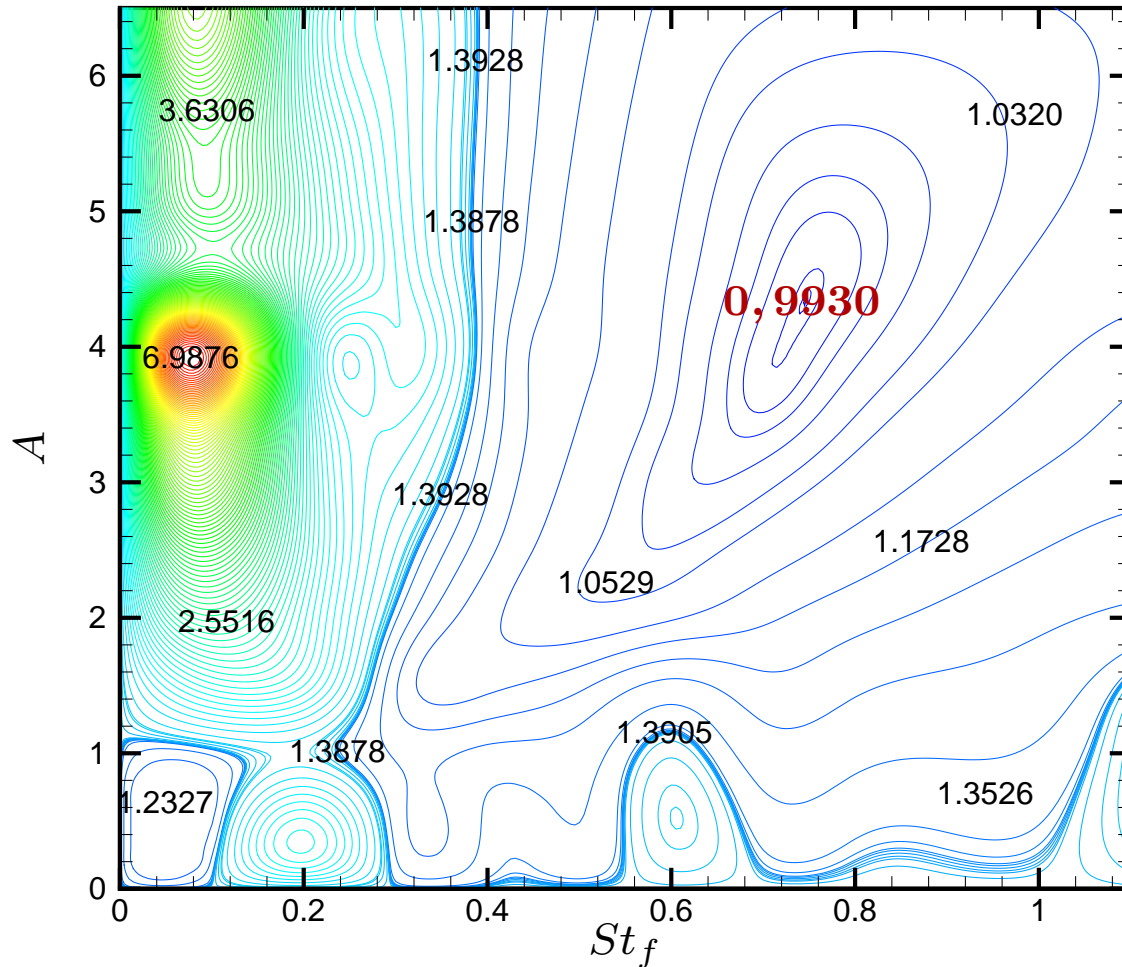


Fig. : *Coefficient de traînée moyen en fonction de l'amplitude et de la fréquence de forçage.*

Minimum (global ?) : $C_D = 0,9930$ pour $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$.

I - Etude paramétrique *Synchronisation des fréquences*

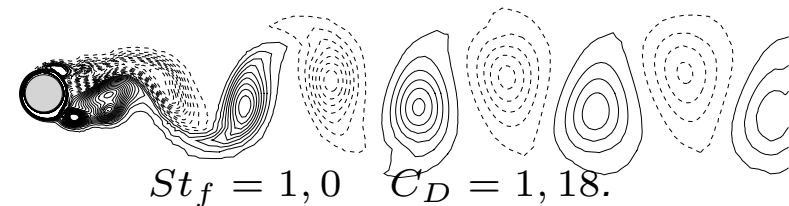
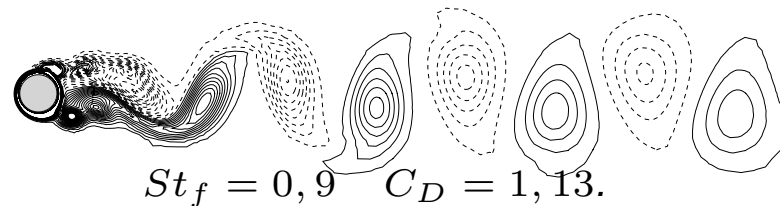
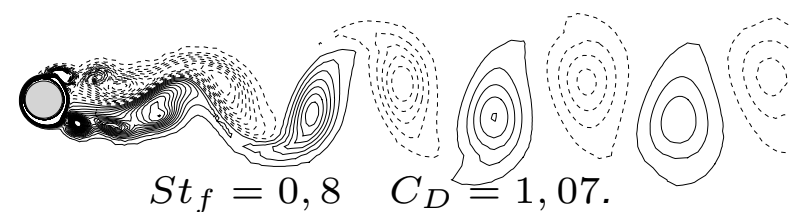
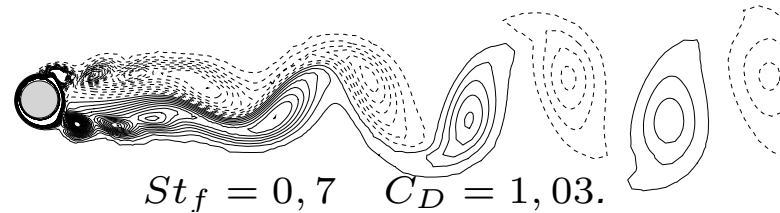
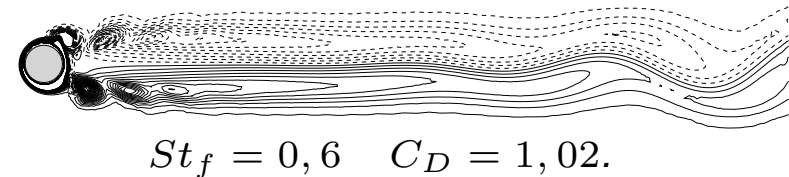
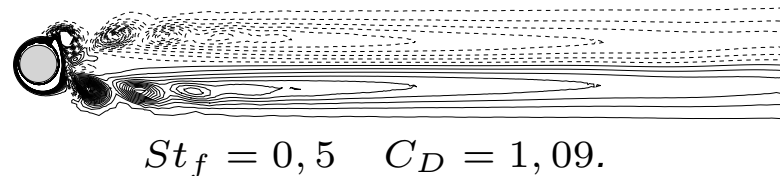
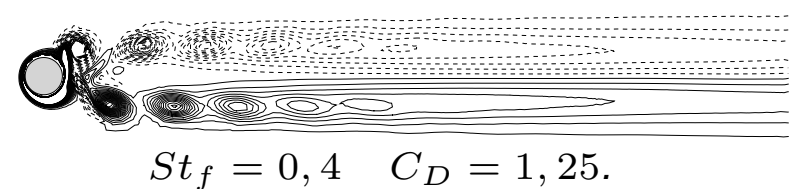
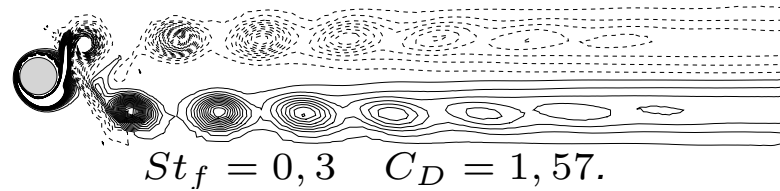
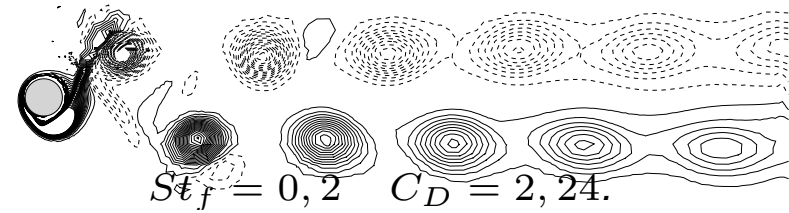
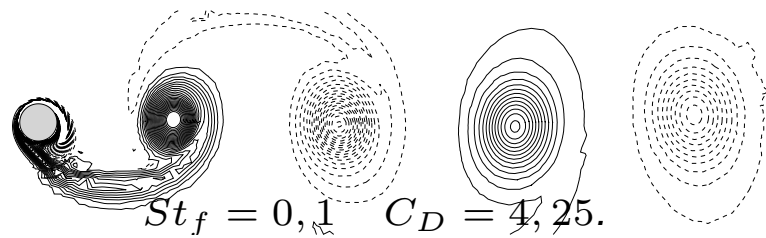


Fig. : Isovaleurs de la vorticité ω_z pour $A = 3$

I - Etude paramétrique *Synchronisation des fréquences*

Définitions : **Lock-on** : la fréquence du lâché de tourbillons St est égale à la fréquence de forçage St_f , soit $St = St_f$

Lock-in : idem *lock-on* avec $St_f = St_n$, où St_n est la fréquence naturelle

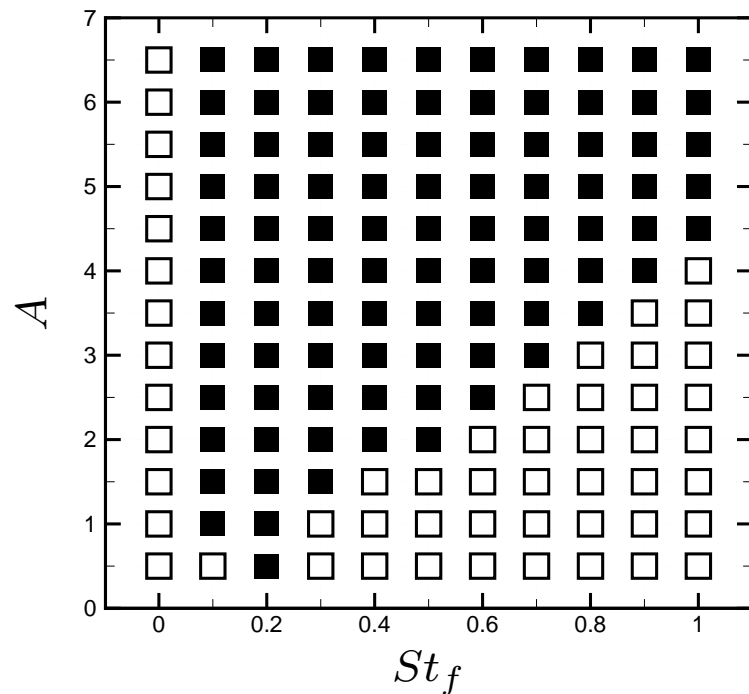


Fig. : Écoulements lock-on ■ et no lock-on □ en fonction de l'amplitude A et du nombre de Strouhal St_f de forçage.

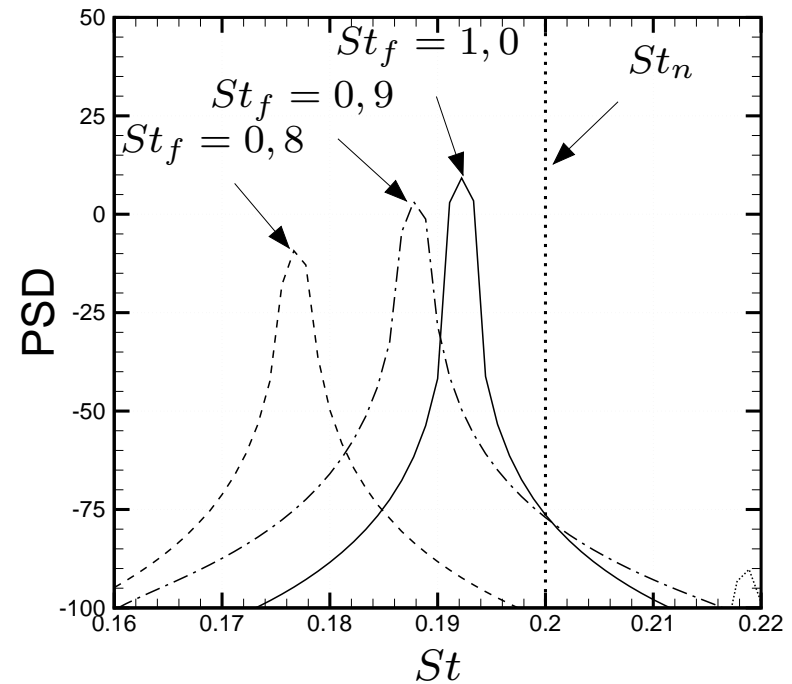


Fig. : Evolution des spectres de puissance du coefficient de portance pour $A = 3$ après la zone de lock-on.

I - Etude paramétrique *Synchronisation des fréquences*

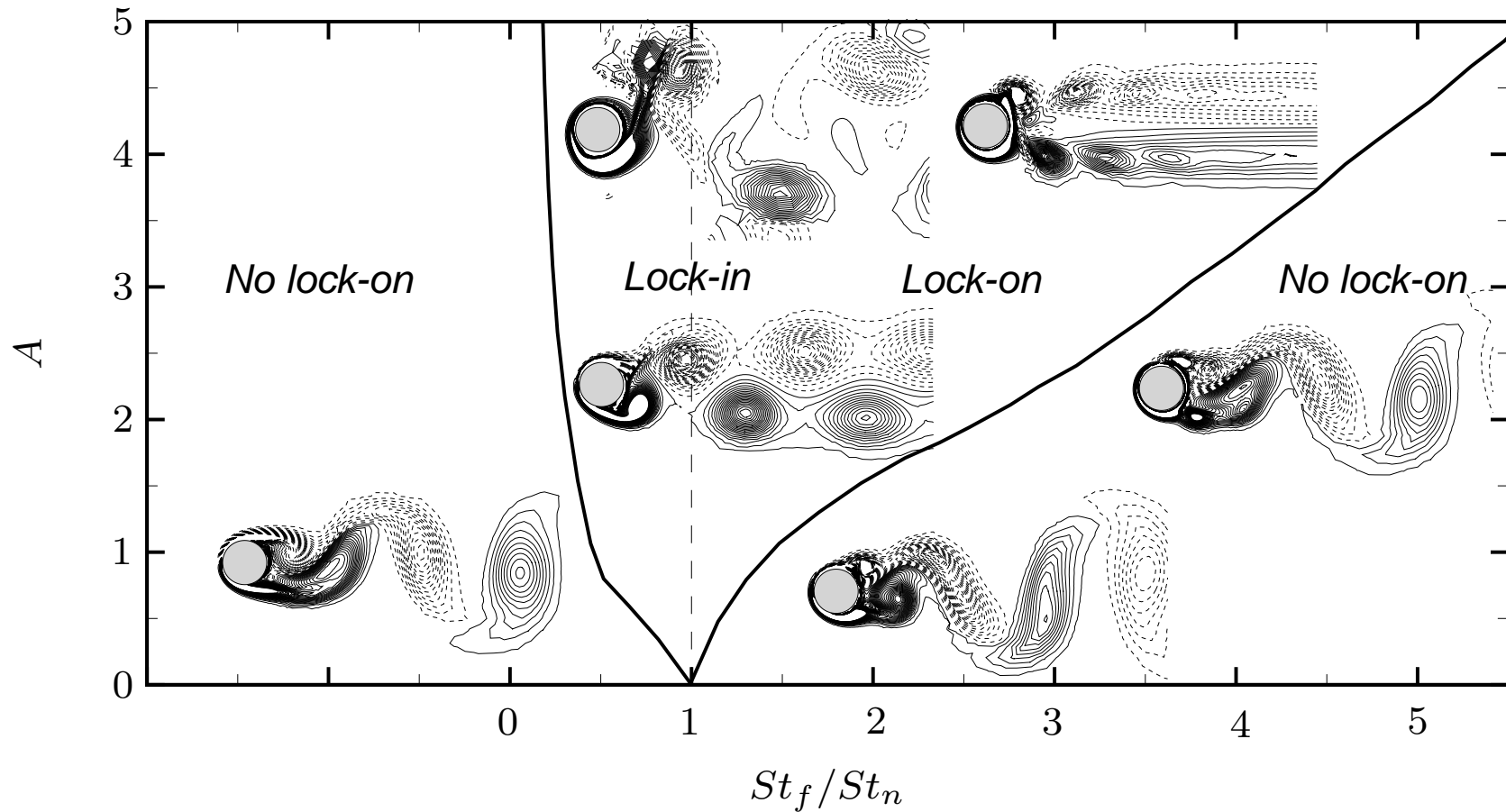


Fig. : Bande fondamentale lock-on et iso-contours de vorticité ω_z dans le sillage proche.

Écoulements hors *lock-on* "semblables"

I - Etude paramétrique *Angle maximal de rotation*

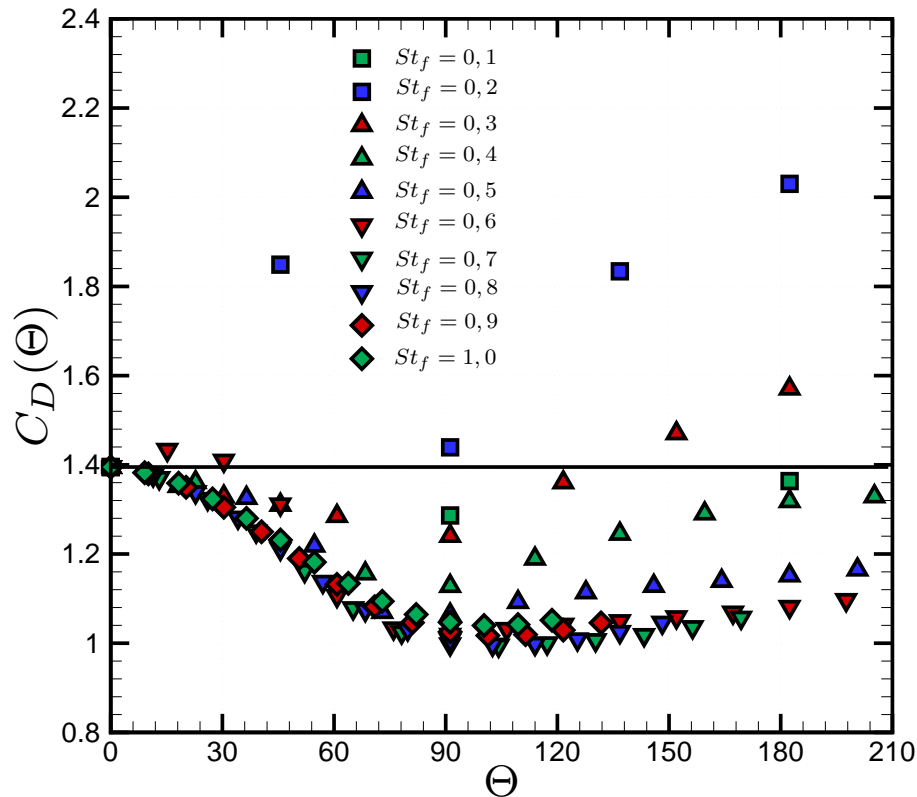


Fig. : Coefficient de traînée moyen en fonction de l'angle maximal de rotation.

Notation

► Angle maximal de rotation :

$$\Theta = \max_t \{\theta(t)\} = \frac{A}{\pi St_f}$$

Observations

► Réduction de traînée maximale

$$\Theta_{max} = 95^\circ$$

↪ Coefficient de traînée minimal

$$C_D = 0,993$$

N.B. : Sans contrôle, $C_D \simeq 1,4$

Existence d'une valeur optimale Θ_{max} pour l'angle maximal de rotation

I - Etude paramétrique *Angle maximal de rotation*

Notations :

- $C_{Dmin}(St_f) = \min_{A \in \mathbb{R}} C_D(\Theta, St_f)$
- $C_{D\Theta_{max}}(St_f) = C_D(\Theta_{max}, St_f)$

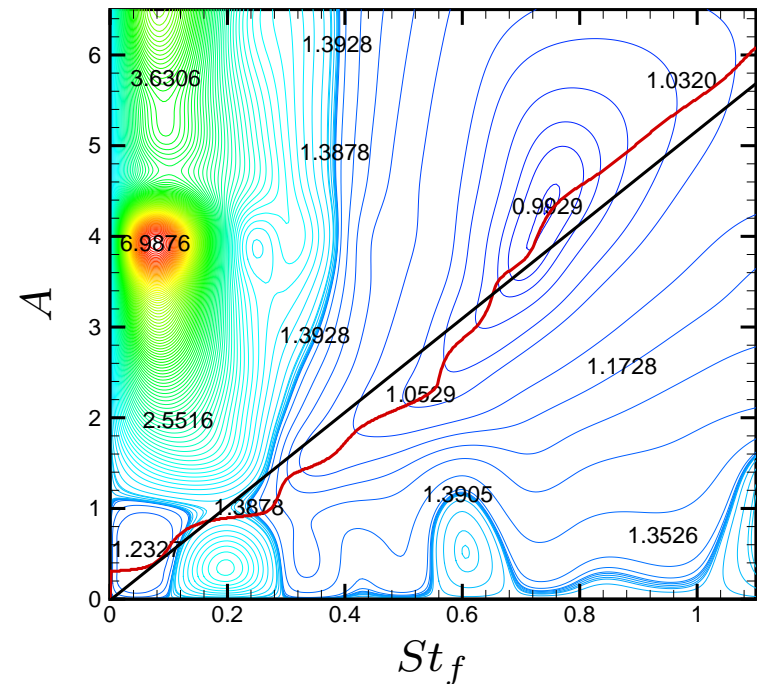
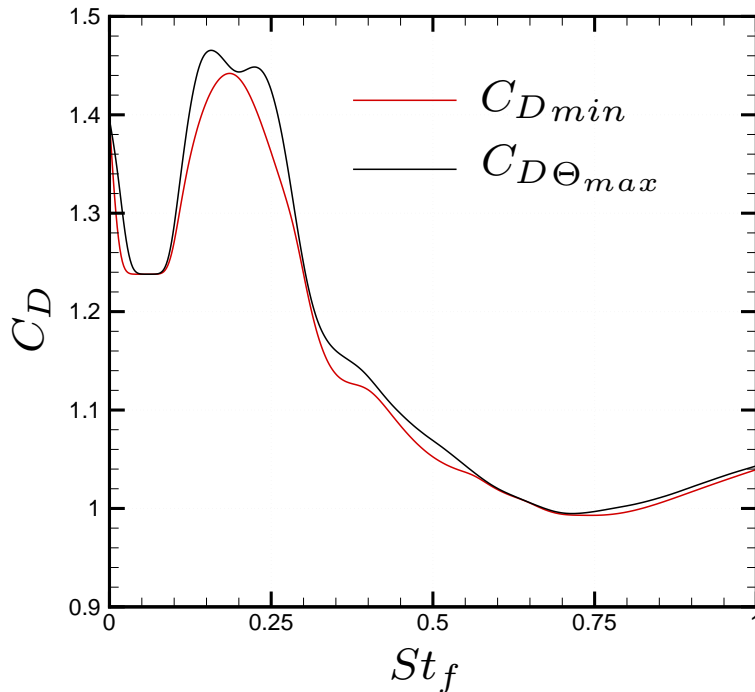


Fig. : Evolution du coefficient de traînée moyen en fonction du nombre de Strouhal.

Fig. : Dépendance des paramètres optimaux dans l'espace de contrôle

▷ Bonne concordance entre C_{Dmin} et $C_{D\Theta_{max}}$.

A et St_f "optimaux" semblent dépendants : $A/St_f = 5, 2$ ($\Theta_{max} = 95^\circ$)

II - Théorie du contrôle optimal *Définition*

Méthode mathématique permettant de déterminer **sans empirisme** une loi de commande à partir de l'optimisation d'une fonctionnelle coût.

▷ **Equations d'état** $\mathcal{F}(\phi, c) = 0$;

(Navier-Stokes + C.I. + C.L.)

▷ **Variables de contrôle** c ;

(Soufflage/aspiration, paramètres de forme, ...)

▷ **Fonctionnelle objectif** $\mathcal{J}(\phi, c)$

(Traînée, portance, ...)

Déterminer les variables de contrôle c et les variables d'état ϕ telles que la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\phi, c)$ soit minimale ou maximale sous les contraintes

$$\mathcal{F}(\phi, c) = 0.$$

II - Théorie du contrôle optimal *Méthode duale*

Optimisation avec contraintes \Rightarrow optimisation sans contraintes

- ▷ Introduction de multiplicateurs de Lagrange ξ (pour chaque contrainte active).
- ▷ Fonctionnelle de Lagrange : $\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle \mathcal{F}(\phi, c), \xi \rangle$.
- ▷ Problème : rendre \mathcal{L} "stationnaire" \Rightarrow déterminer $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0$.
- ▷ Hypothèse : ϕ, c et ξ indépendantes : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0$.

$$\hookrightarrow \text{Solution de } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta \xi = 0 : \quad \text{équations d'état} \quad \mathcal{F}(\phi, c) = 0.$$

$$\hookrightarrow \text{Solution de } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = 0 : \quad \text{équations adjointes} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^*.$$

$$\hookrightarrow \text{Solution de } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = 0 : \quad \text{conditions d'optimalité} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right)^* = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} \right)^* \xi.$$

\Rightarrow **Assure un extremum local (minimum)**

\Rightarrow **Méthode de résolution coûteuse en temps CPU**

et mémoire pour des systèmes de grandes tailles !

II - Théorie du contrôle optimal *Réduction de modèle*

"without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional unsteady Navier-Stokes system will become routine"

M. Gunzburger, 2000

II - Réduction de modèle *POD*

Proper Orthogonal Decomposition (POD), Lumley (1967)

★★ Lecture series, Part I, Von Karman Institute, 2003 ★★

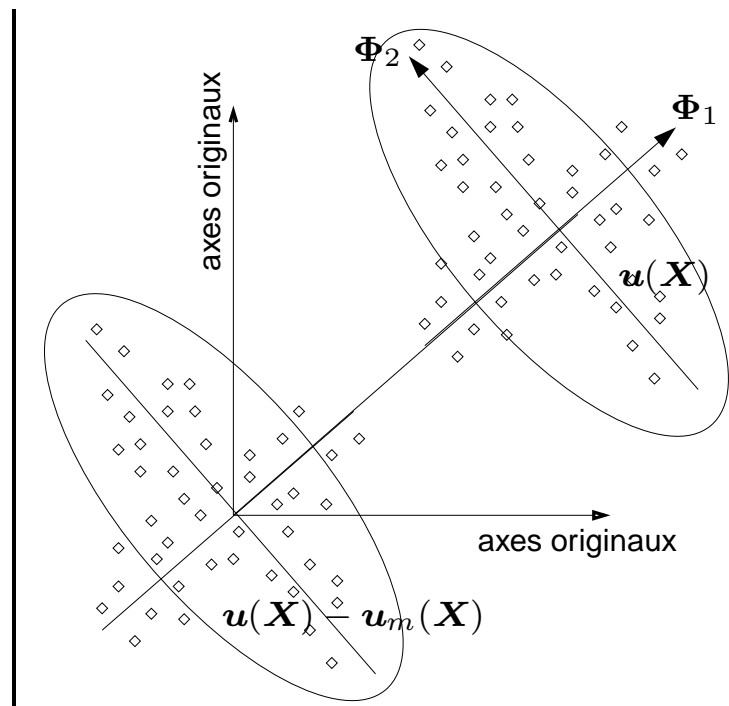
▷ Rechercher la réalisation $\Phi(\mathbf{X})$ "ressemblant le plus" en moyenne aux réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{X})$.

$$(\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+)$$

▷ $\Phi(\mathbf{X})$ solution du problème :

$$\max_{\Phi} \langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle, \quad \|\Phi\|^2 = 1.$$

▷ Convergence optimale *en norme* L^2 de $\Phi(\mathbf{X})$
⇒ réduction de dynamique envisageable.



Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.

II - Réduction de modèle *POD*

▷ Equivalence avec une équation intégrale de Fredholm :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_n^{(j)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda_n \Phi_n^{(i)}(\mathbf{X}) \quad n = 1, \dots, N_{POD}$$

$\hookrightarrow R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') : \textit{tenseur des corrélations spatio-temporelles}$

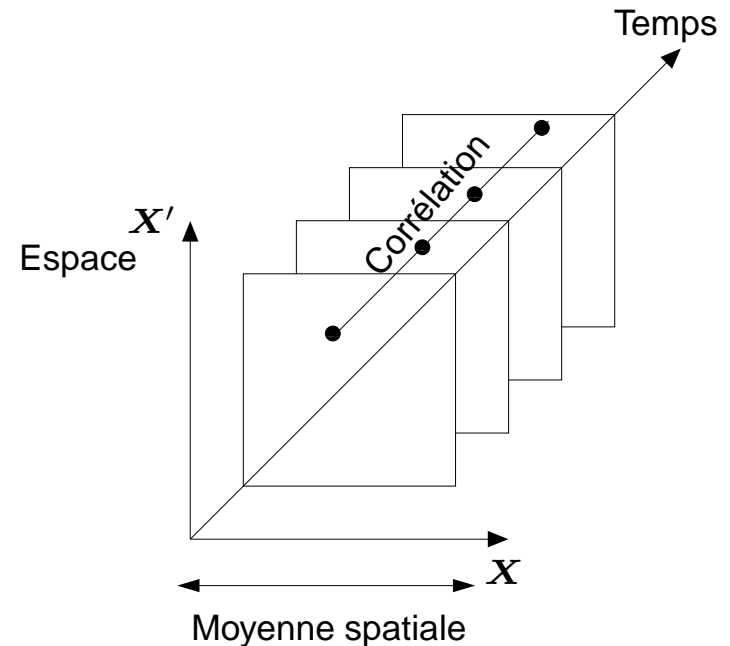
▷ Méthode des snapshots, Sirovich (1987) :

$$\int_T C(t, t') a_n(t') dt' = \lambda_n a_n(t)$$

$\hookrightarrow C(t, t') : \textit{corrélations temporelles}$

▷ $\Phi(\mathbf{X})$ base de l'écoulement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n(\mathbf{x}).$$



Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1,2,3 *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV** N° 3, pp. 561–571.

II - Réduction de modèle *POD*

Réaliser une troncature dans la base *POD* en conservant 99% de l'énergie relative

▷ Contenu énergétique relatif : $RIC(M) = \frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N_{POD}} \lambda_k}$

Cas test : $A = 2$ et $St_f = 0,5 \Rightarrow N_{POD} = 361$ réalisations sur $T = 18$

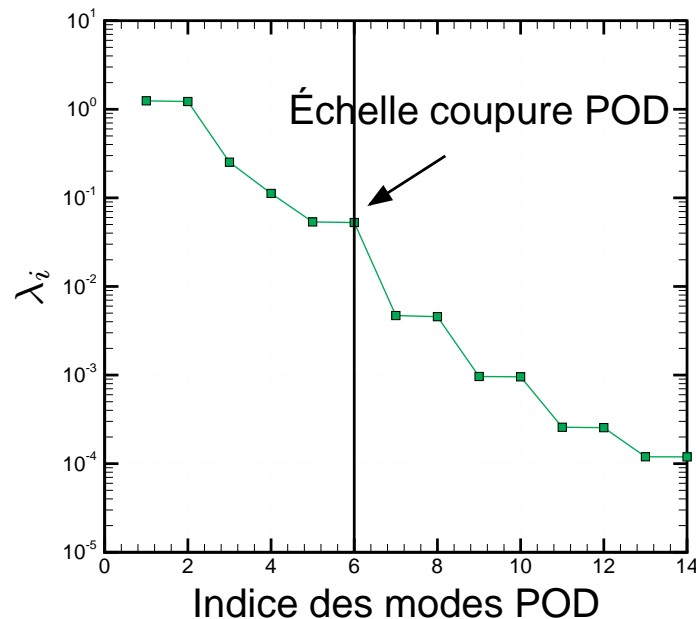


Fig. : Spectre énergétique *POD*.

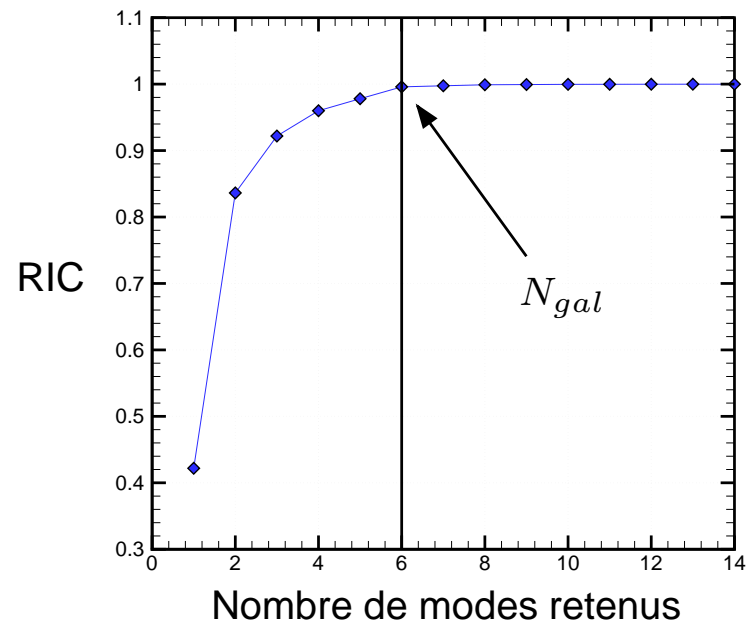


Fig. : $RIC(M)$, M nb modes *POD* retenus.

$$N_{gal} = \arg \min_M RIC(M) \text{ t.q. } RIC(N_{gal}) > 99\% \Rightarrow N_{gal} = 6!$$

II - Réduction de modèle *POD*

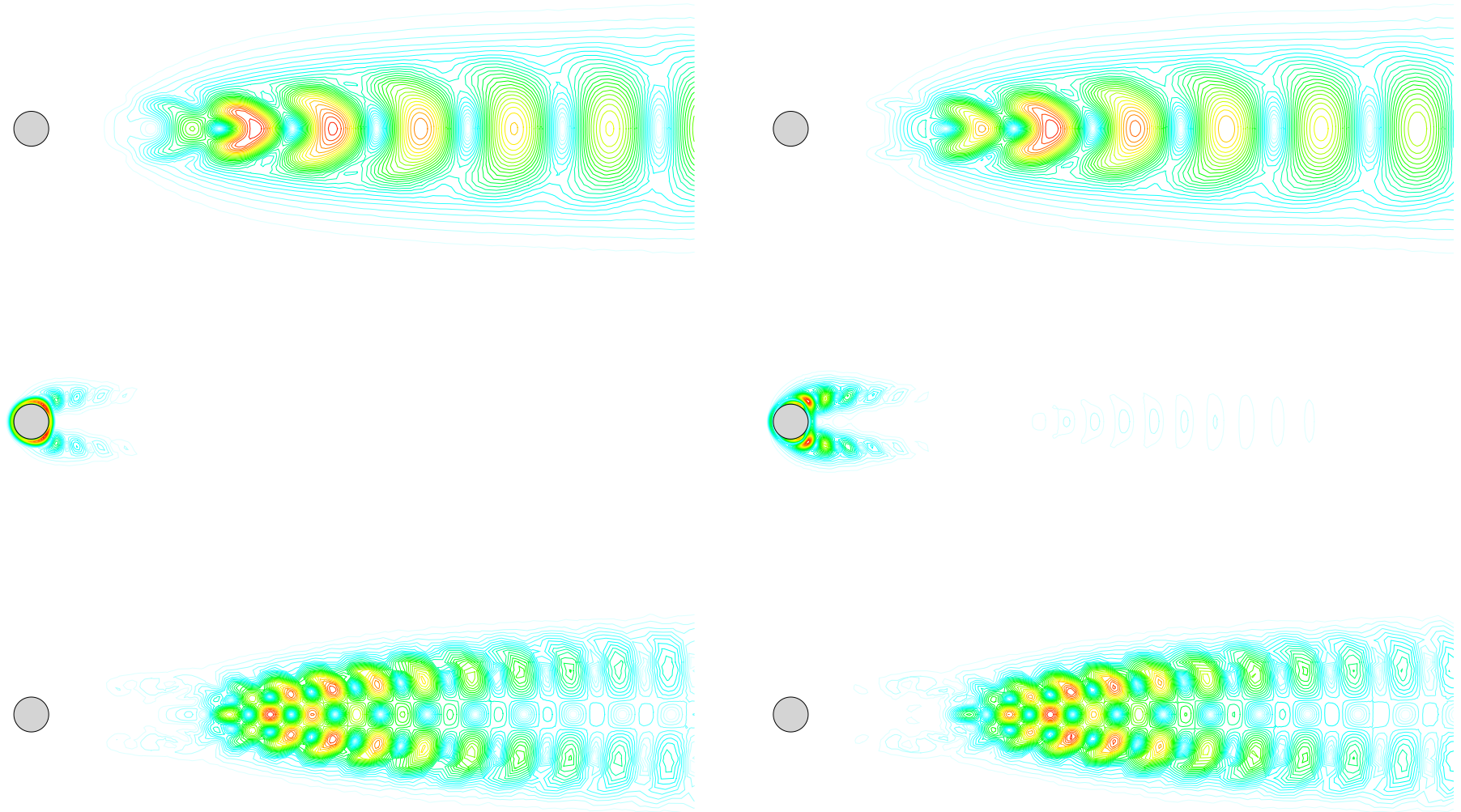


Fig. : Représentation des 6 premiers modes *POD* de fluctuations autour du champ moyen

$$\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t) \text{ avec } A = 2 \text{ et } St_f = 0,5.$$

II - Réduction de modèle *POD ROM*

Réduction d'ordre du sillage contrôlé d'un cylindre (POD ROM)

★★ Lecture series, Part II, Von Karman Institute, 2003 ★★

▷ Projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD :

$$\left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \left(\Phi_i, -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right).$$

▷ Intégration par parties (formule de Green) :

$$\begin{aligned} \left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= (p, \nabla \cdot \Phi_i) - \frac{1}{Re} \left((\nabla \otimes \Phi_i)^T, \nabla \otimes \mathbf{u} \right) \\ &\quad - [p \Phi_i] + \frac{1}{Re} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \Phi_i]. \end{aligned}$$

$$\text{avec } [a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \text{ et } (\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}) = \int_{\Omega} \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} \, d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} \, d\mathbf{x}.$$

▷ Termes de pression "indésirables" : \Rightarrow élimination

II - Réduction de modèle *POD ROM*

▷ Décomposition du champ de vitesse sur N_{POD} modes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}).$$

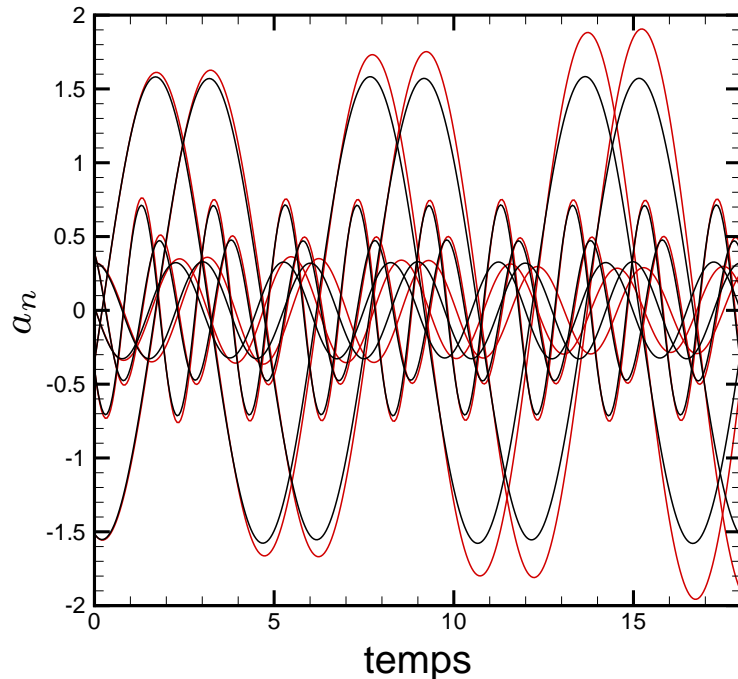
▷ Système dynamique réduit avec N_{gal} ($\ll N_{POD}$) modes retenus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_i(t)}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d\gamma}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2 \\ a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$ et \mathcal{G}_i dépendent uniquement de Φ , \mathbf{u}_m , \mathbf{u}_c et Re

II - Réduction de modèle *Stabilisation POD ROM*

Erreurs de reconstruction POD ROM \Rightarrow amplification temporelle des modes



Causes :

- ▷ Extraction POD : grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
- ▷ Essentiel dissipation : petites structures

Solution :

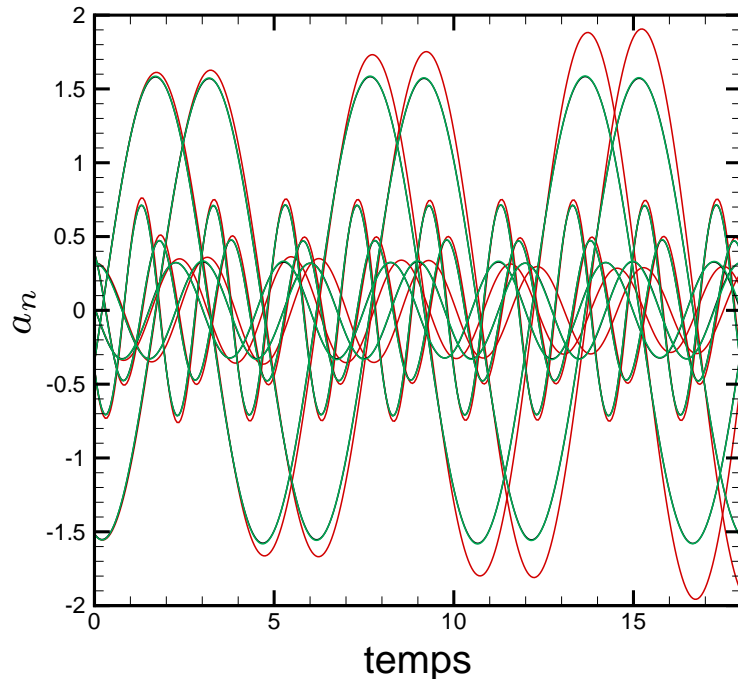
- ▷ Ajout de viscosités artificielles sur chaque mode POD \Rightarrow *solution problème d'optimisation auxiliaire*

★★ soumis à *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2007 ★★

— projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
— prédiction avant stabilisation (POD ROM)

II - Réduction de modèle *Stabilisation POD ROM*

Erreurs de reconstruction POD ROM \Rightarrow amplification temporelle des modes



Causes :

- ▷ Extraction POD : grosses et moyennes structures porteuses d'énergie
- ▷ Essentiel dissipation : petites structures

Solution :

- ▷ Ajout de viscosités artificielles sur chaque mode POD \Rightarrow *solution problème d'optimisation auxiliaire*

★★ soumis à *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2007 ★★

- projection (Navier-Stokes) : $a_{\tau n}(t)$
- prédiction avant stabilisation (POD ROM)
- prédiction après stabilisation (POD ROM).

\Rightarrow **Modèle réduit validé**

II - Réduction de modèle *Stabilisation POD ROM*

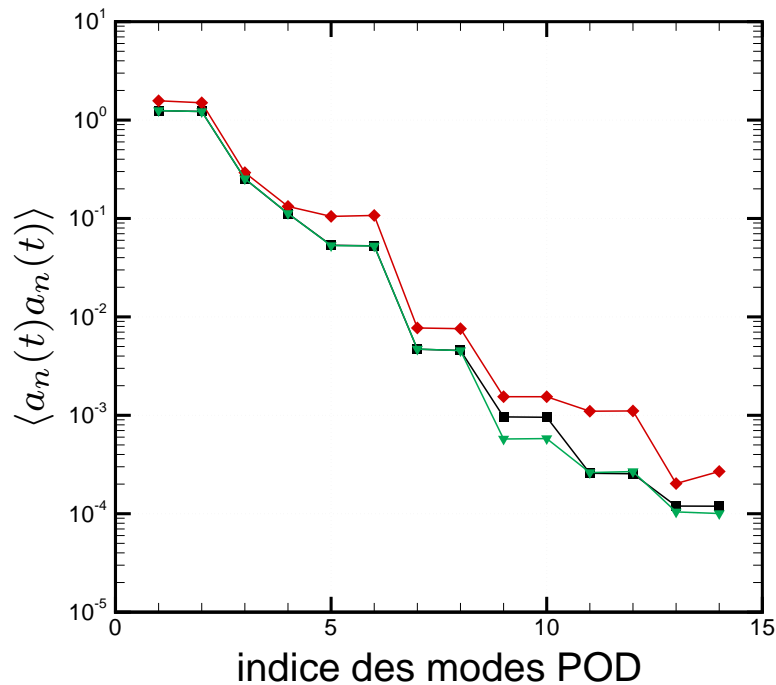


Fig. : Comparaison du contenu énergétique de chaque mode POD estimé respectivement par DNS et par POD ROM.

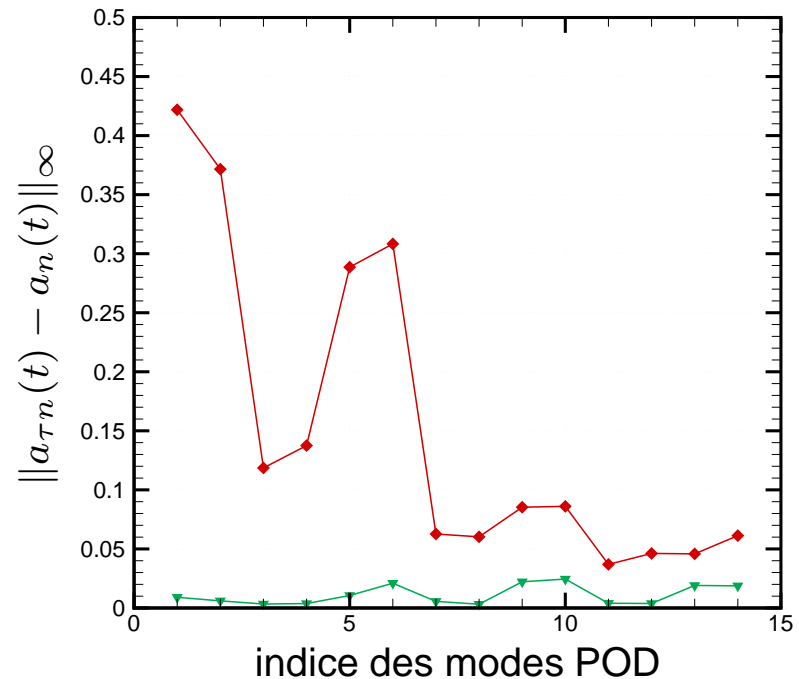
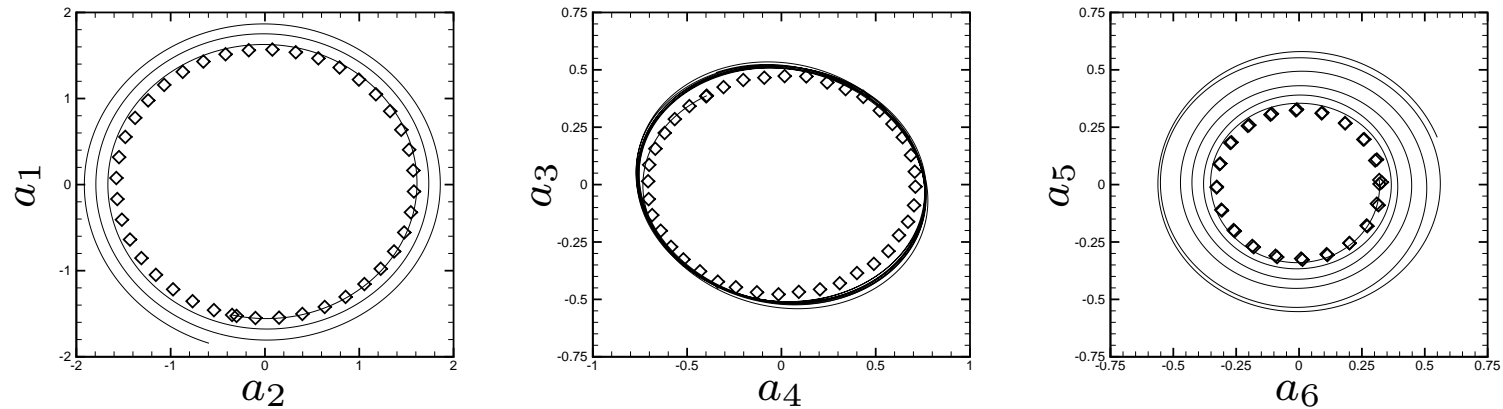


Fig. : Erreur en norme infinie du contenu énergétique de chaque mode POD avant et après stabilisation.

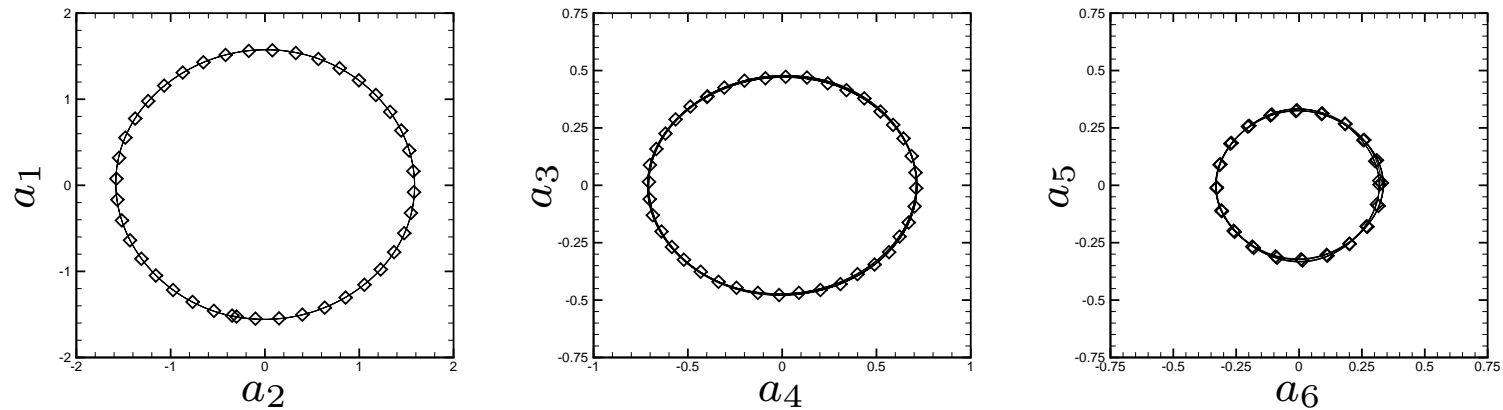
- ▷ Bonne concordance entre spectres POD ROM et DNS
- ▷ Réduction de l'erreur de reconstruction entre les modes prédits (POD) et projetés (DNS)

⇒ **Validation du modèle réduit POD**

II - Réduction de modèle *Stabilisation POD ROM*



Sans ajout de viscosités artificielles.



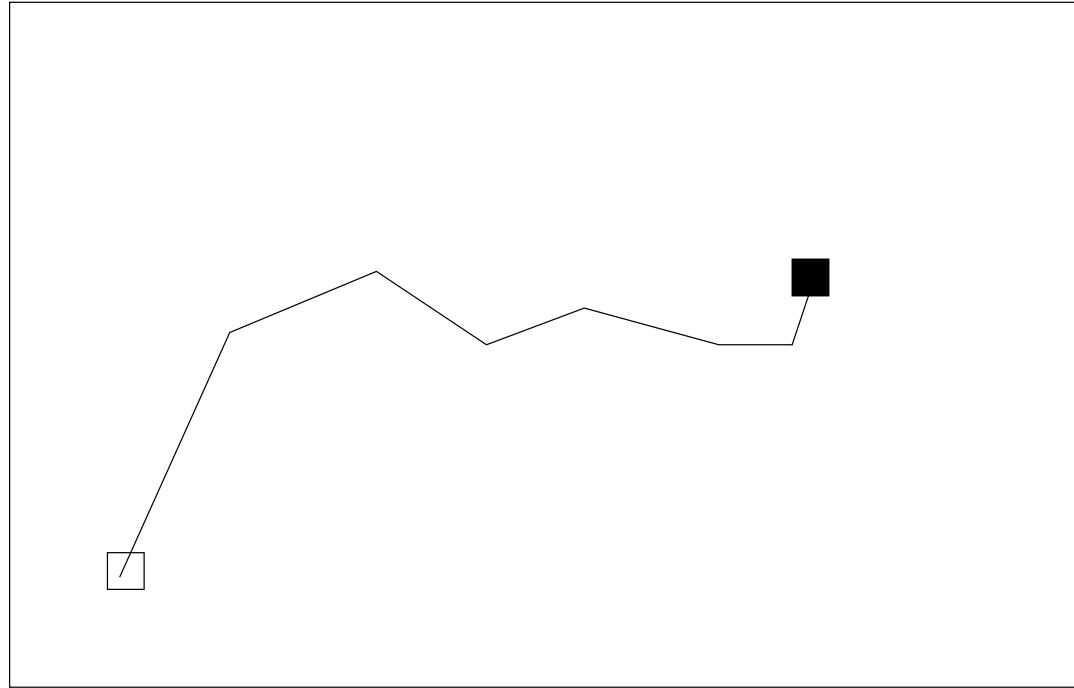
Avec ajout de viscosités artificielles.

Fig. : *Portraits de phase des 6 premiers coefficients temporels a_n sur 18 unités de temps.*

◇ modes DNS; — modes POD.

Le modèle réduit POD représente correctement *une unique dynamique* ...

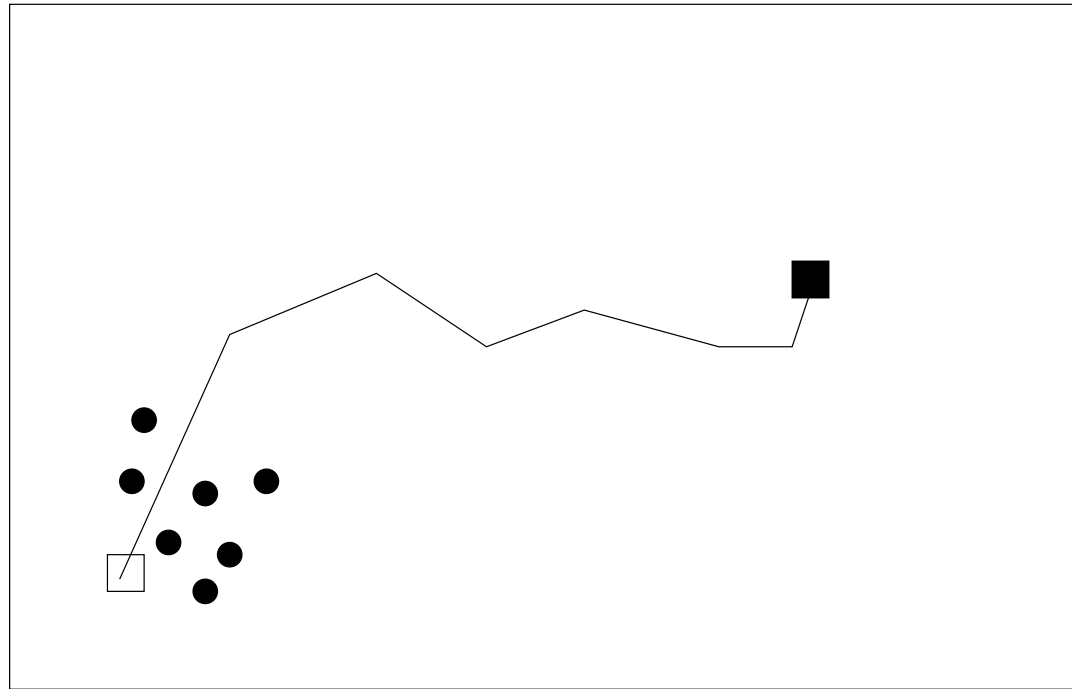
II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



Configuration générale.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation.*

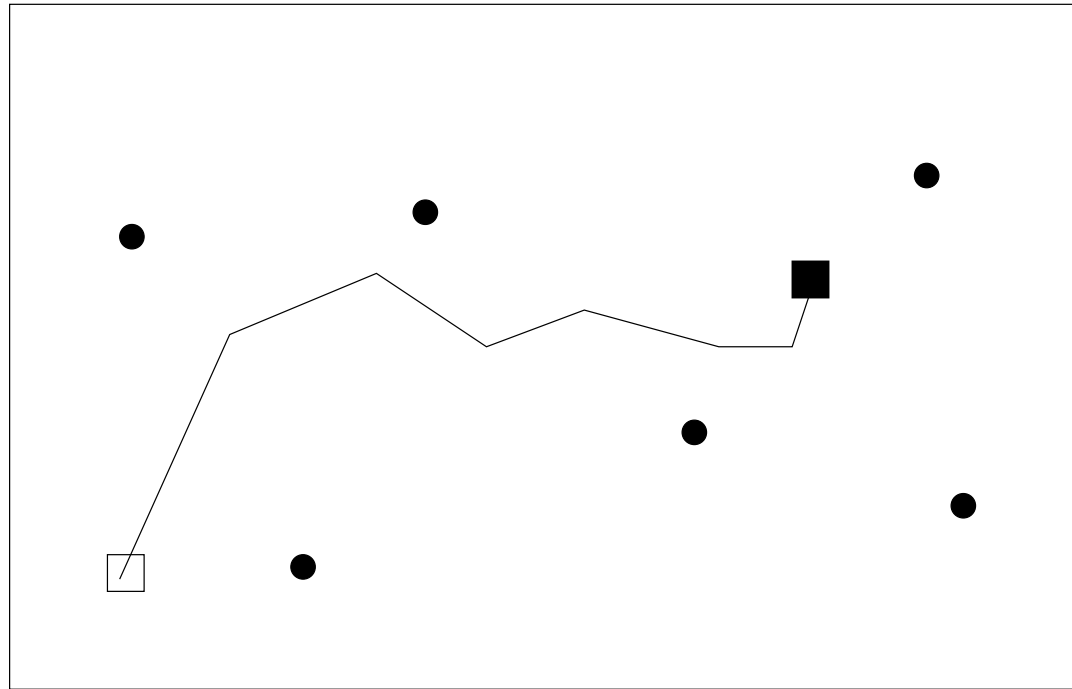
II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

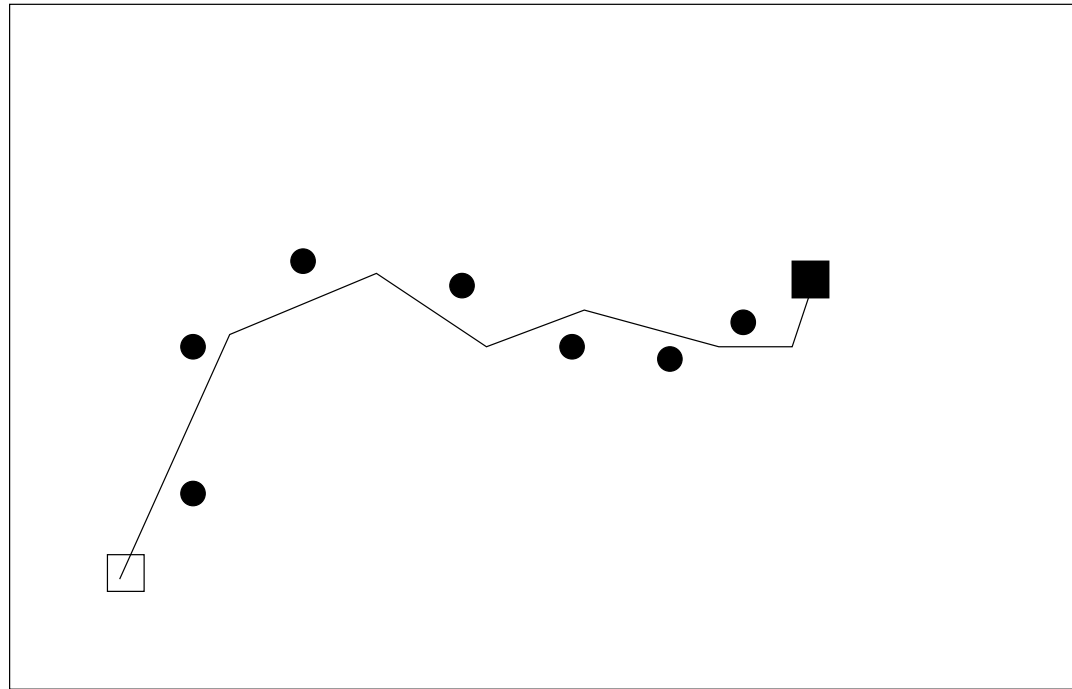
II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



Echantillonnage inadapté.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

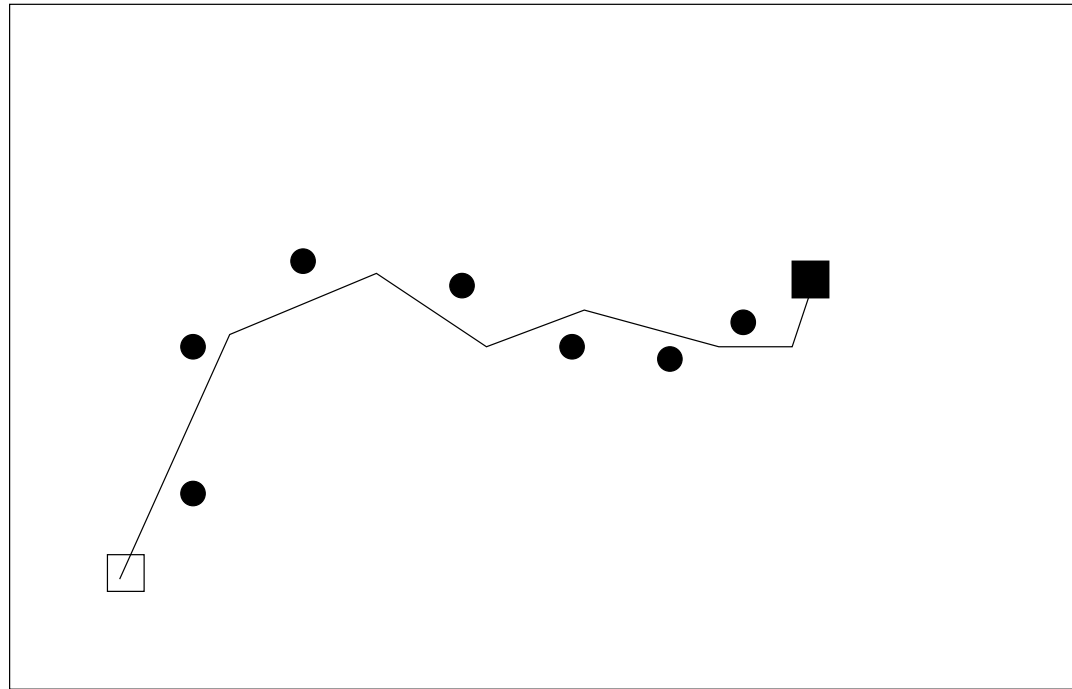
II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



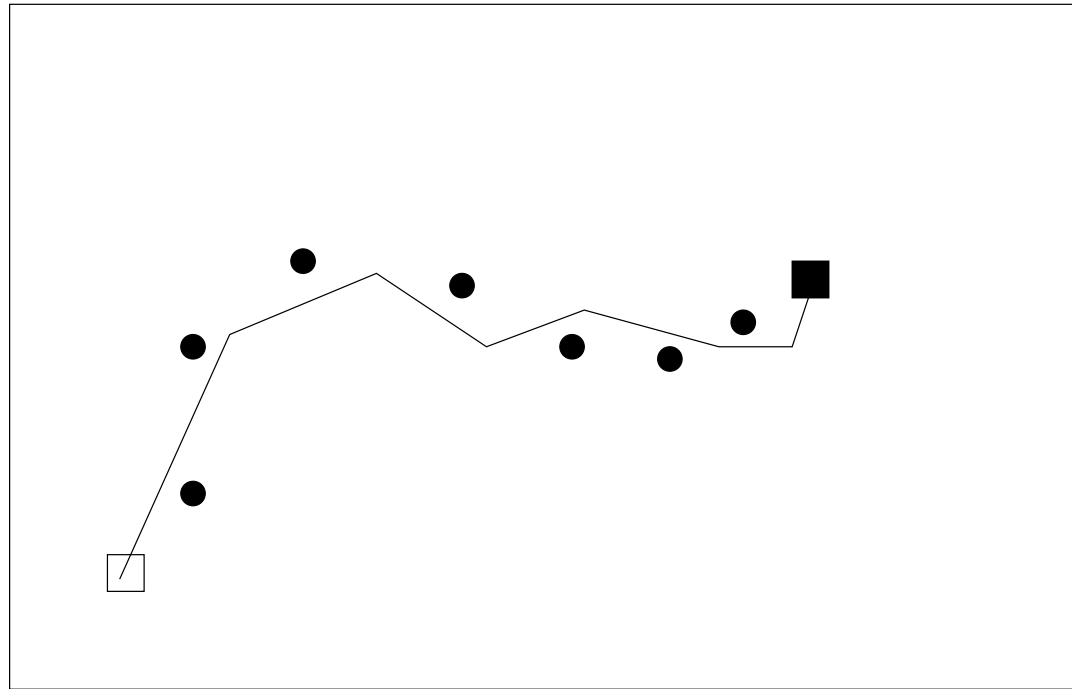
Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- ▷ La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation

III - Optimisation sans réactualisation de la base POD

II - Réduction de modèle *Choix des réalisations*



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation,*
● *réalisation utilisée pour la base de données.*

- ▷ La base représente toutes les dynamiques le long du chemin d'optimisation

III - Optimisation sans réactualisation de la base POD

- ▷ La base ne représente qu'une dynamique contrôlée particulière

IV - Optimisation avec réactualisation de la base POD

III - Base POD non réactualisée *Présentation*

★★ Phys. Fluids 17 (9), 2005 ★★

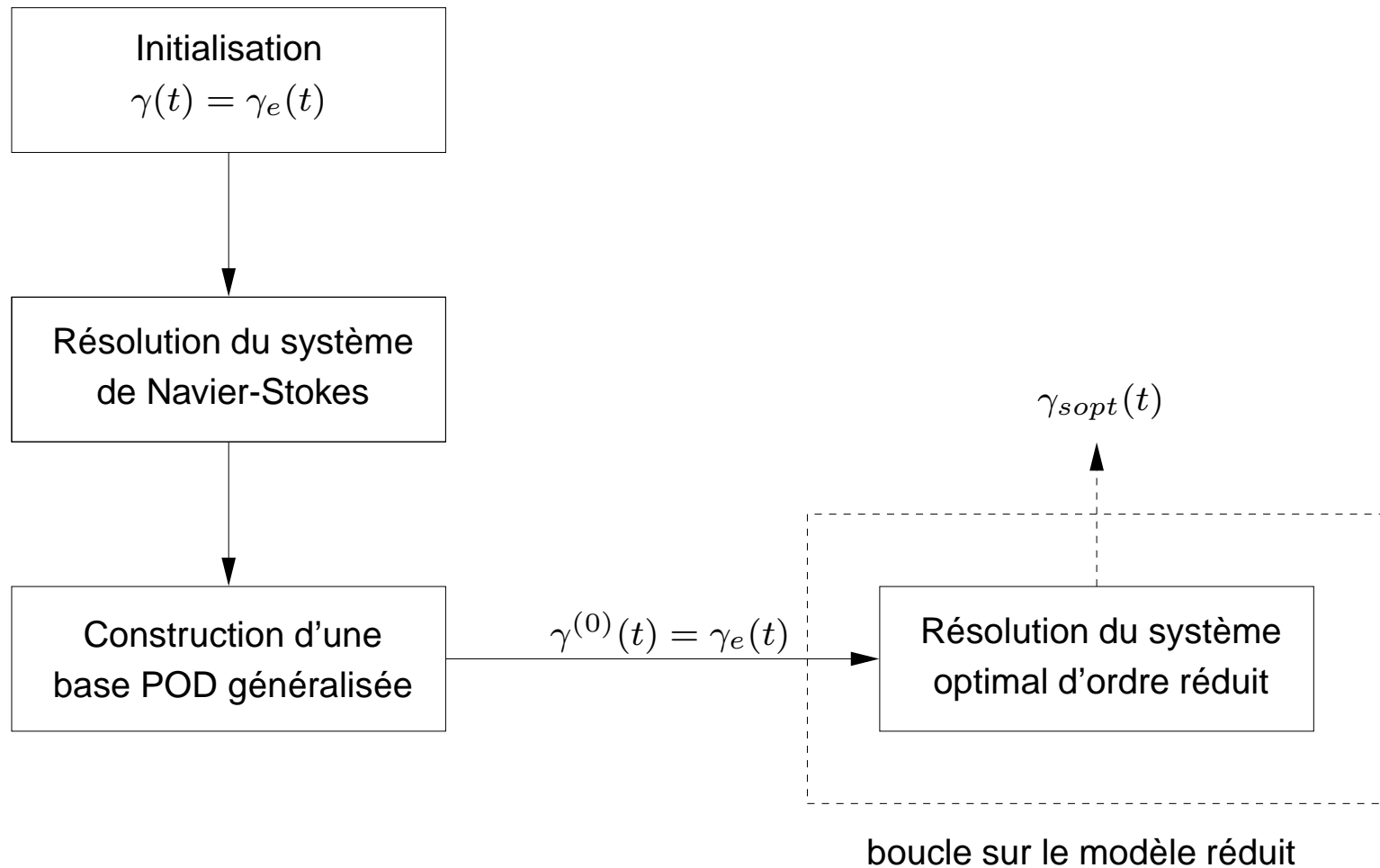


Fig. : Représentation schématique de méthode d'optimisation sans réactualisation de la base POD.

III - Base POD non réactualisée *Contrôle optimal*

Objectif : minimiser l'instationnarité du sillage

▷ **Fonctionnelle coût :**

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i^2(t) + \frac{\alpha}{2} \gamma^2(t) \right) dt.$$

α : paramètre de régularisation (pénalisation).

▷ **Equations adjointes :**

$$\begin{cases} \frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k \right) \xi_j(t) - 2a_i \\ \xi_i(T) = 0. \end{cases}$$

▷ **Condition d'optimalité :**

$$\delta\gamma(t) = - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi_i + \alpha \gamma(t).$$

III - Base POD non réactualisée *Système optimal*

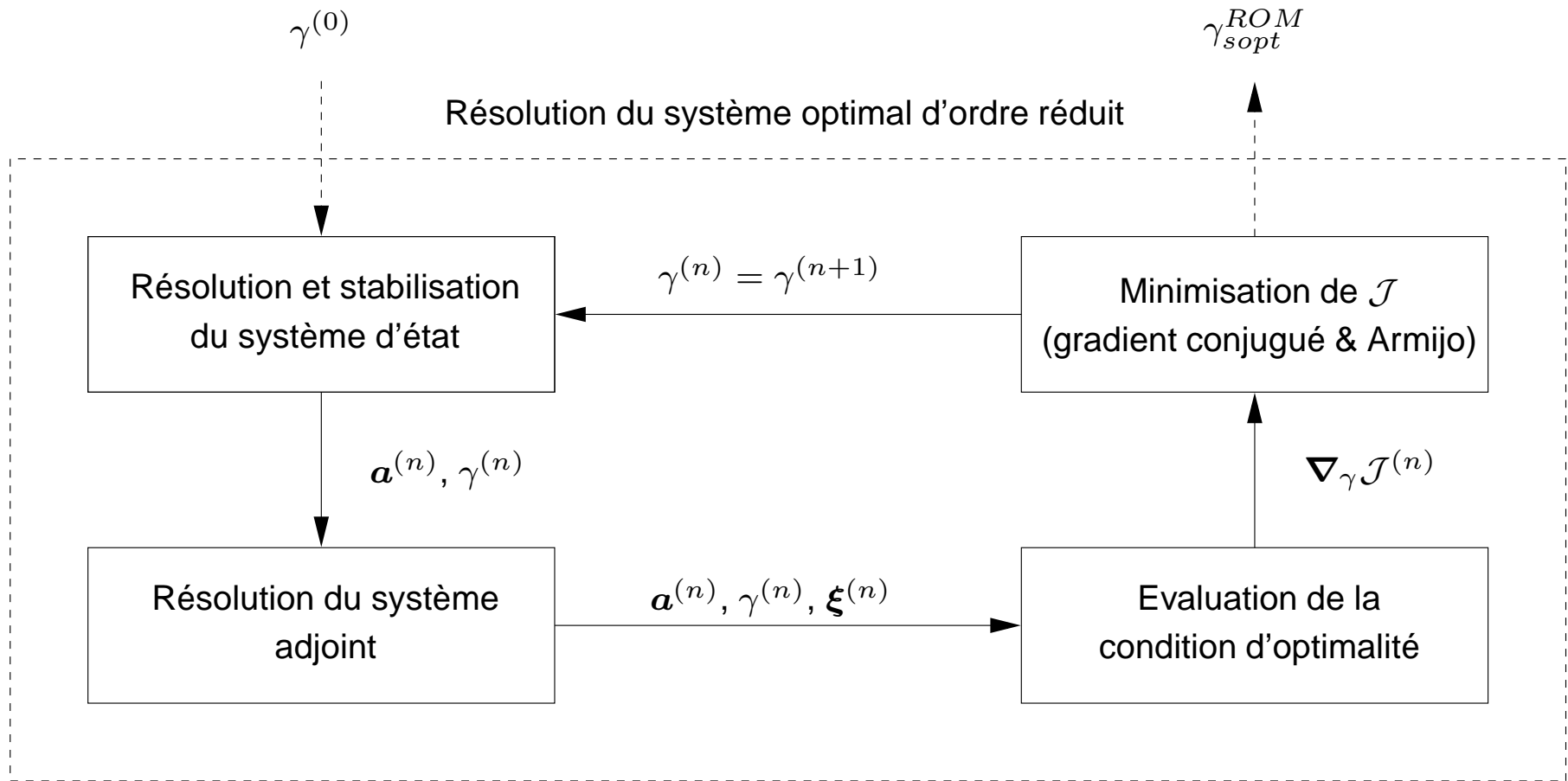


Fig. : Représentation schématique du processus de résolution du système optimal d'ordre réduit.

III - Base POD non réactualisée *Méthode*

Problème : un système POD représente *a priori* uniquement une dynamique proche de celle utilisée pour le générer

Méthode : construction d'une base POD généralisée représentative d'une plus large gamme de dynamique \rightarrow balayage amplitude et fréquence de $\gamma(t)$

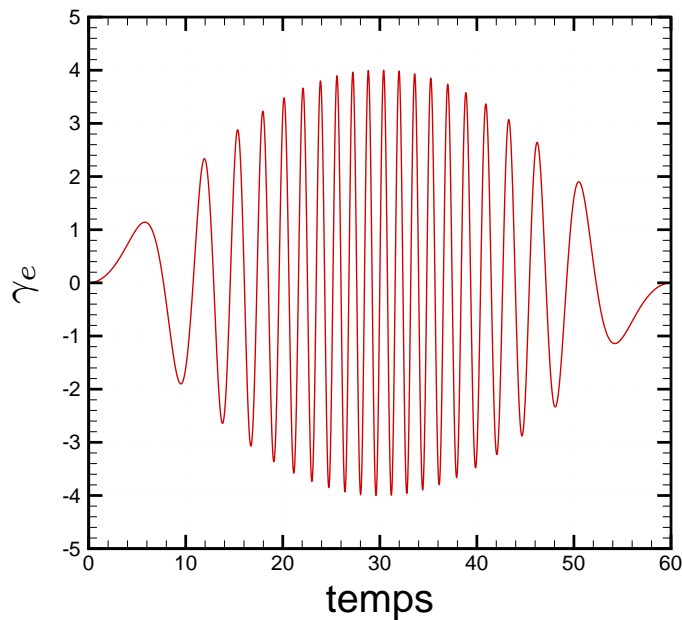


Fig. : Excitation temporelle γ_e imposée au cylindre.

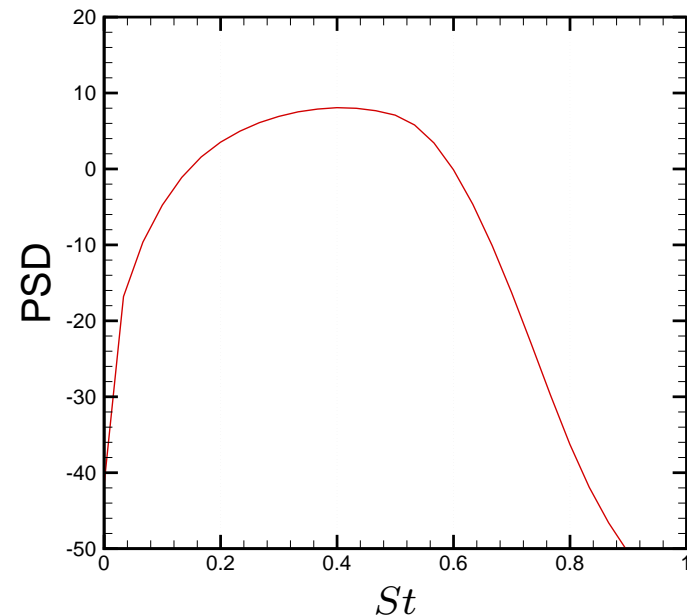


Fig. : Densité spectrale de puissance de l'excitation temporelle γ_e .

$\triangleright 0 \leq \text{amplitudes} \leq 4$ et analyse de Fourier $\Rightarrow 0 \leq \text{fréquences} \leq 0,8$

$\triangleright \gamma_e$ loi de contrôle initiale dans processus itératif

III - Base POD non réactualisée *Méthode*

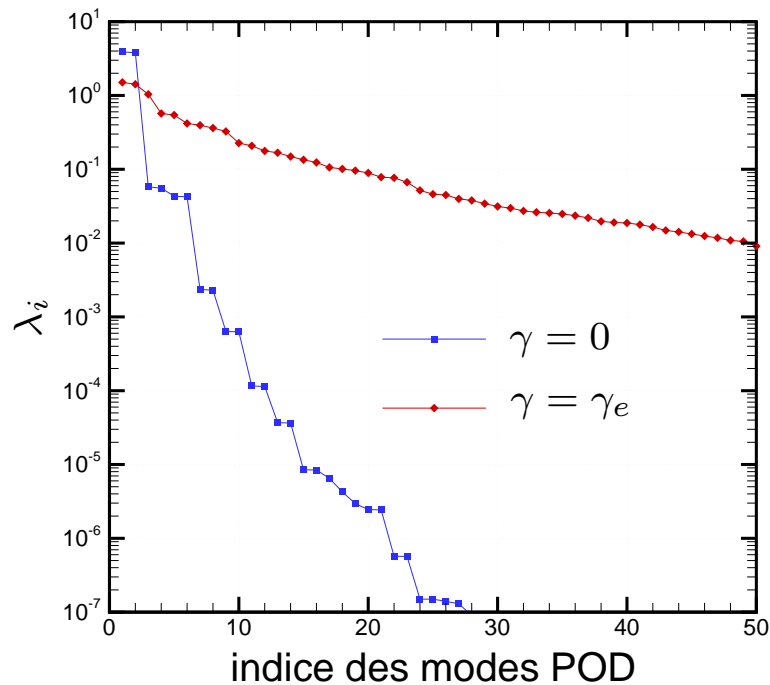


Fig. : Comparaison des spectres de valeurs propres.

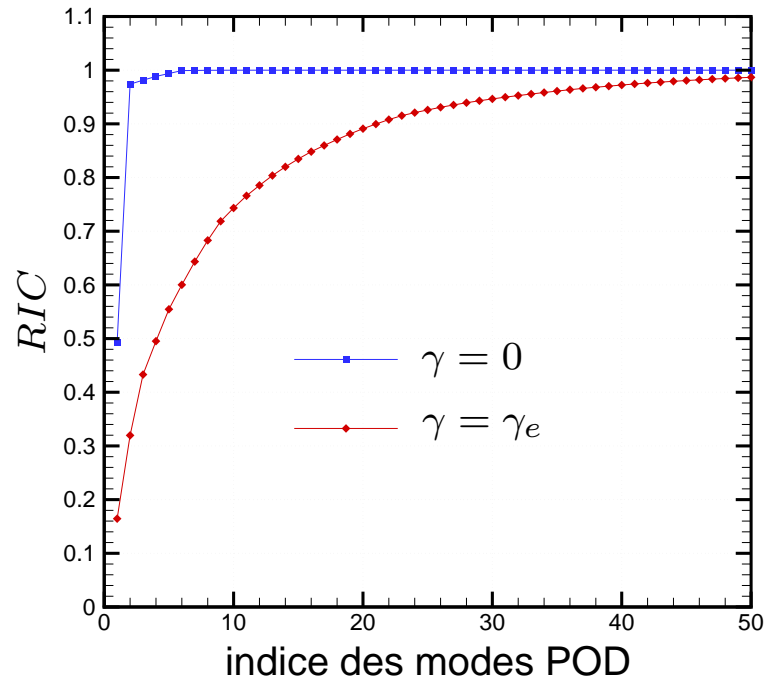


Fig. : Comparaison du contenu informationnel relatif

▷ **Cylindre non contrôlé, $\gamma = 0$:**

↪ 2 modes sur 100 suffisent pour représenter 97% de l'énergie.

▷ **Cylindre excité, $\gamma = \gamma_e$:**

↪ 40 modes sur 100 sont nécessaires pour représenter 97% de l'énergie

⇒ **Evolution de la robustesse p.r. aux évolutions dynamiques**

III - Base POD non réactualisée *Contrôle sous-optimale*

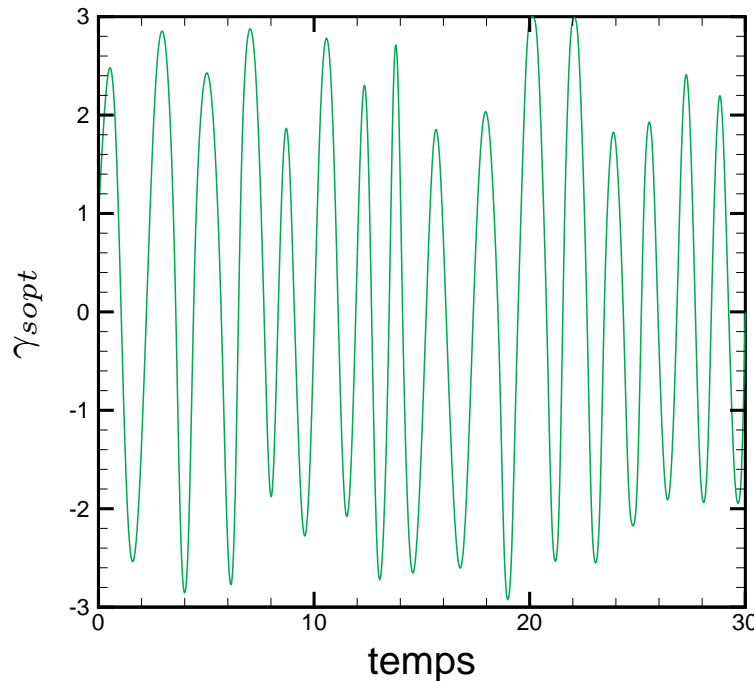


Fig. : Evolution temporelle de la loi de contrôle

γ_{sopt} .

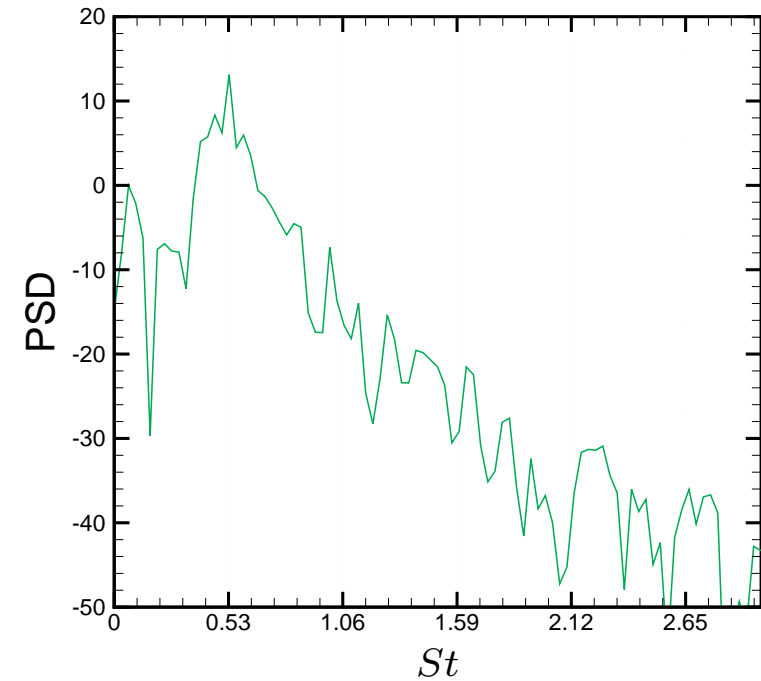


Fig. : Densité spectrale de puissance de la loi de

contrôle γ_{sopt} .

▷ Diminution très importante de l'instationnarité du sillage :

$$\mathcal{J}(\gamma_e) = 11,85 \implies \mathcal{J}(\gamma_{sopt}) = 3,70.$$

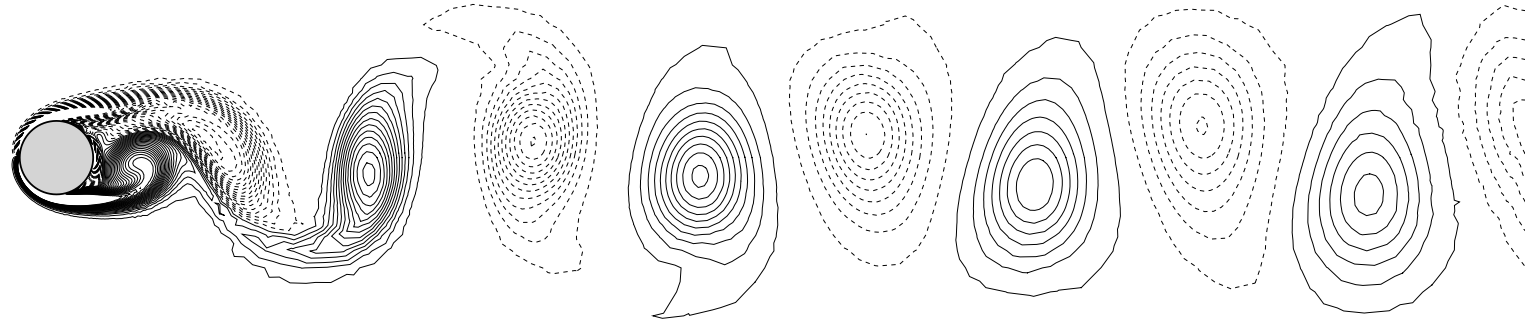
$$\gamma_{sopt} \simeq A \sin(2\pi St_f t) \text{ avec } A = 2,2 \text{ et } St_f = 0,53$$

Le contrôle est optimal pour le système POD ROM

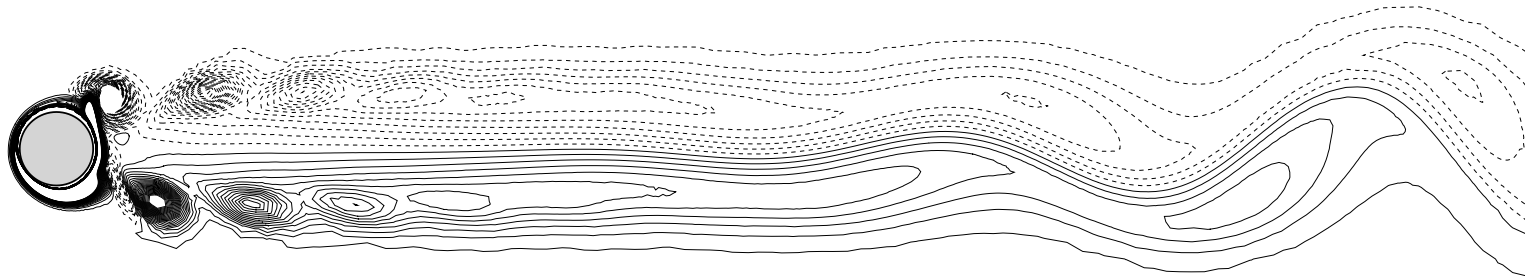
Le contrôle est-il optimal pour Navier-Stokes ?

III - Base POD non réactualisée *Sillage*

Aucune preuve mathématique d'optimalité pour Navier-Stokes



Écoulement non contrôlé : $\gamma = 0 \Rightarrow$ Sillage asymétrique.
 \hookrightarrow Grosses structures porteuses d'énergie.



Écoulement contrôlé : $\gamma = \gamma_{opt} \Rightarrow$ Sillage quasi symétrique.
 \hookrightarrow Plus petites structures \Rightarrow moins énergétiques.

Fig. : Isocontours de vorticité ω_z

III - Base POD non réactualisée *Coeff. aéro.*

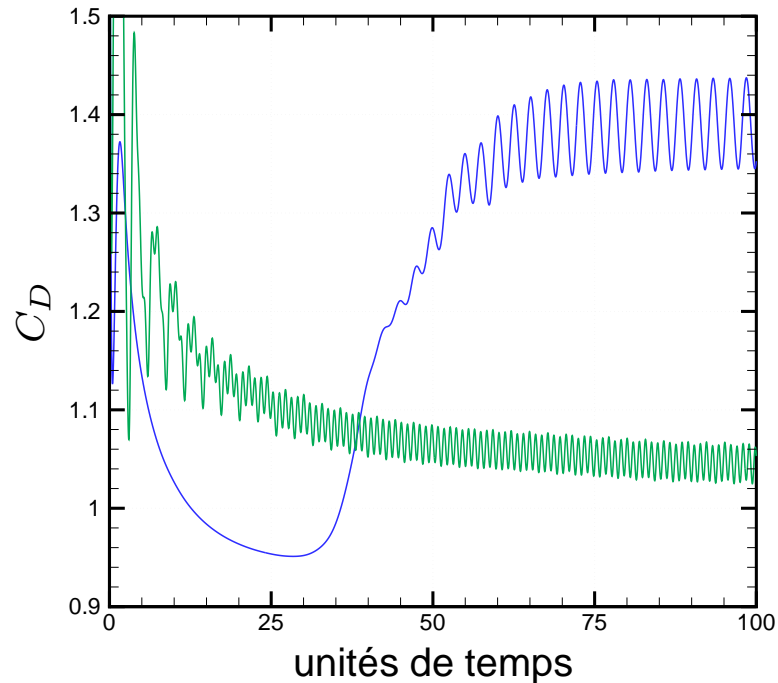


Fig. : Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée

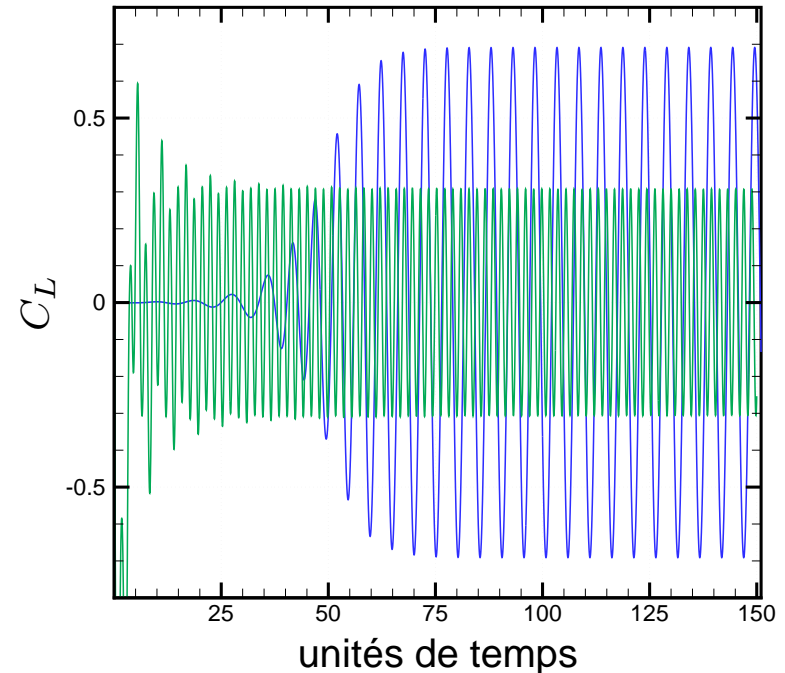


Fig. : Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance

▷ Importante réduction de traînée :

$$C_D = 1,40 \text{ pour } \gamma = 0 \text{ et } C_D = 1,06 \text{ pour } \gamma = \gamma_{sopt} \text{ (plus de 25\%)}$$

▷ Diminution de l'amplitude de la portance :

$$C_L = 0,68 \text{ pour } \gamma = 0 \text{ et } C_L = 0,13 \text{ pour } \gamma = \gamma_{sopt}$$

III - Base POD non réactualisée *Coûts de calcul*

▷ Comparaison résultats : POD ROM sans réactualisation / DNS

- Contrôle optimal Navier-Stokes par He *et al.* (2000) :

↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 3$ et $St = 0,75$.
⇒ 30% de réduction de traînée.

- Contrôle *optimal* POD ROM :

↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 2,2$ et $St = 0,53$.
⇒ 25% de réduction de traînée.

▷ Réduction stockage mémoire :

- **600 fois moins de variables** par POD ROM que par NSE !

▷ Réduction temps de calcul :

- **100 fois inférieur** par POD ROM que par NSE
idem équations adjointes et condition d'optimalité).

IV - Base POD réactualisée *Présentation*

★★ J. Comp. Phys., under review ★★

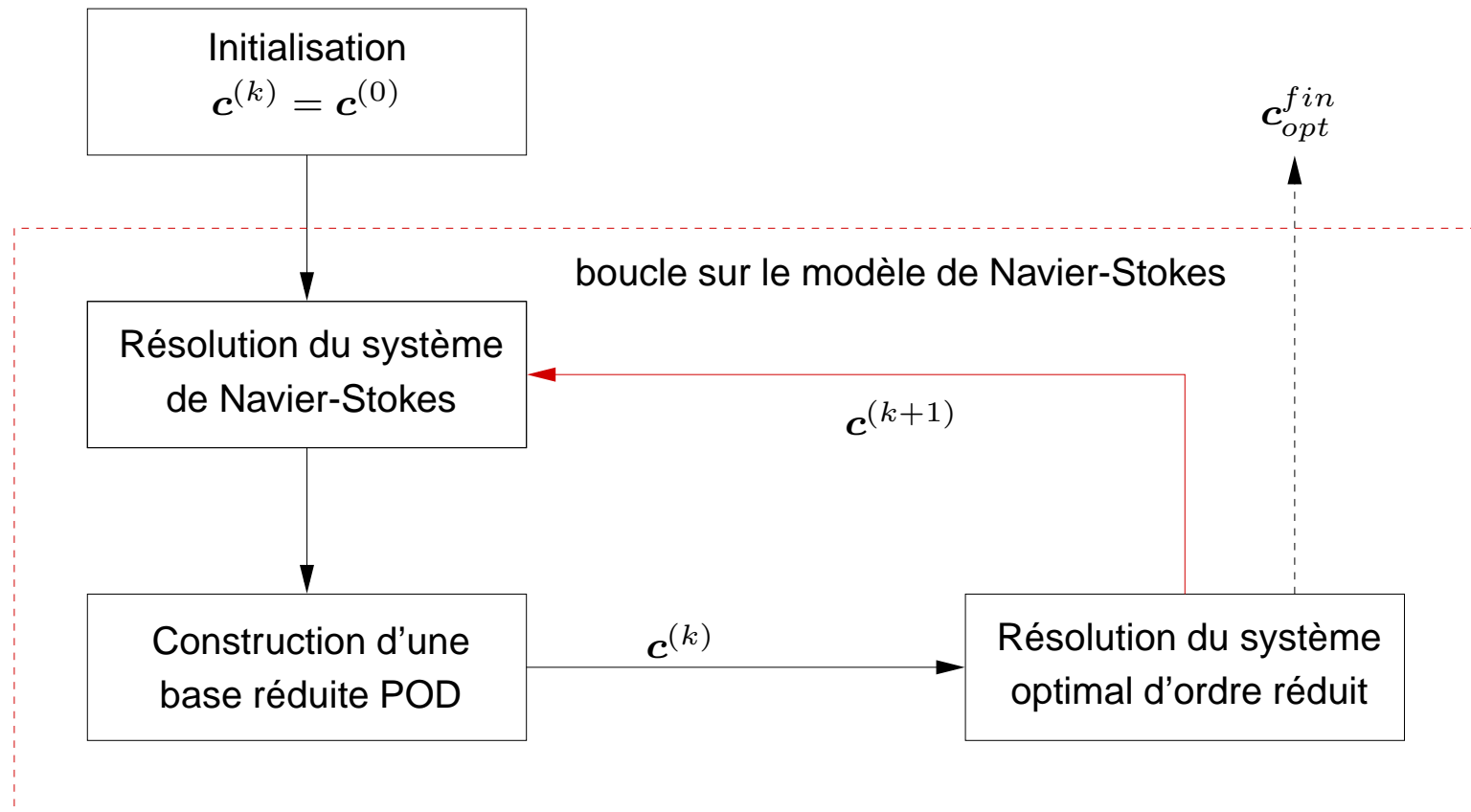
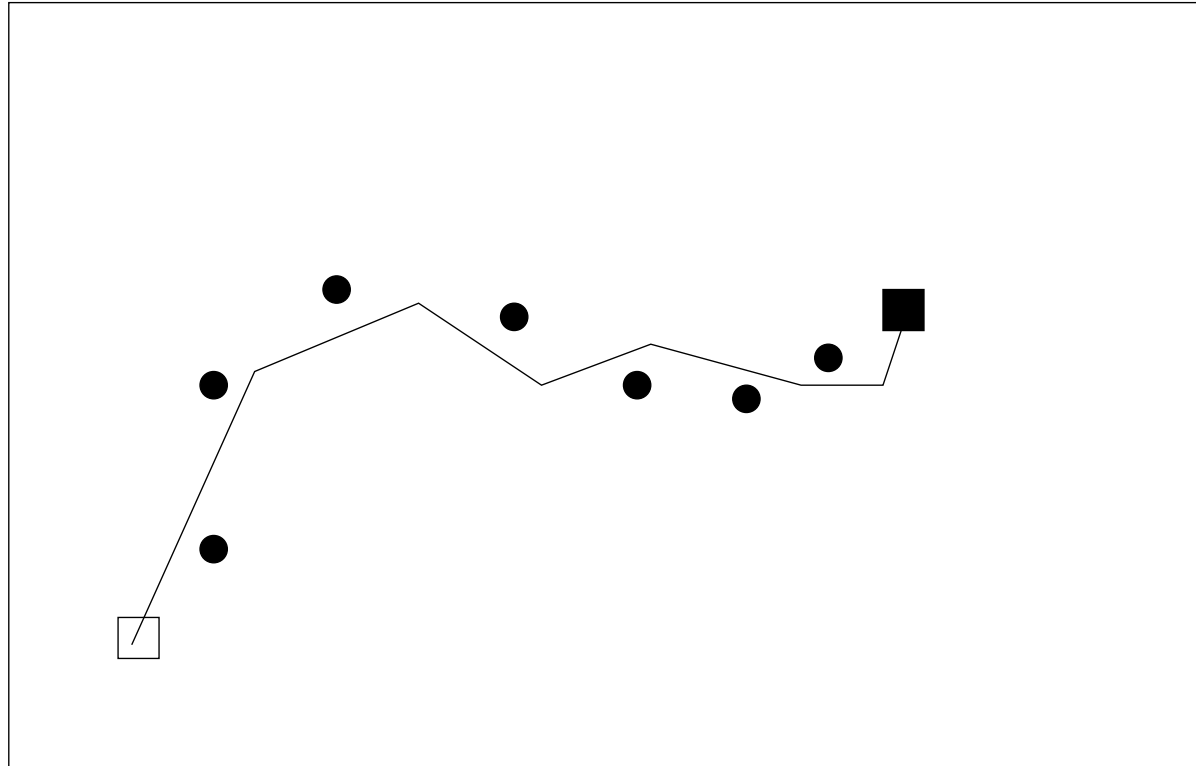


Fig. : Représentation schématique de la méthode d'optimisation avec réactualisation de la base POD.

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?

IV - Base POD réactualisée *Présentation*

★★ J. Comp. Phys., under review ★★



Echantillonnage idéal.

Fig. : *Problème d'optimisation posé dans l'espace des paramètres de contrôle.*
— *chemin d'optimisation, conditions initiale \square et terminale \blacksquare du processus d'optimisation,*
• *réalisation utilisée pour la base de données.*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes ?

IV - Base POD réactualisée *Modes de non-équilibre*

- ▷ **Nécessité de directions non prises en compte dans la base POD initiale** $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N_{gal}}$

- ▷ **Construction N_{neq} modes particuliers**

- Vecteur translation entre le champ moyen I et le champ moyen II :

$$\Phi_0^{I \rightarrow II} = \Phi_0^{II} - \Phi_0^I.$$

- Ajout à la base existante (Gram-Schmidt)

$$\Phi_{N_{gal}+1}^I \equiv \tilde{\Phi}_0^{I \rightarrow II}.$$

- Idem pour $\Phi_0^{I \rightarrow III}$, etc...

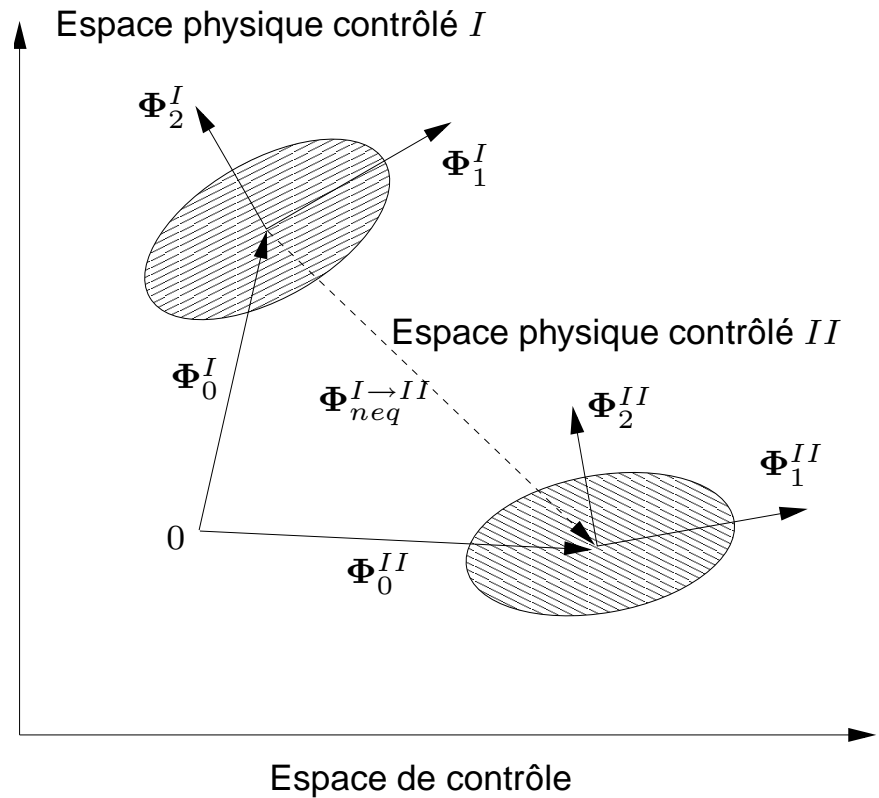


Fig. : Représentation schématique d'une transition de dynamique par utilisation d'un mode moyen de non-équilibre.

Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzyński, M., Tadmor, G. et Thiele, F. (2003) : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **497** pp. 335–363.

IV - Base POD réactualisée *POD ROM augmenté*

- ▷ **Décomposition de la vitesse sur $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes**

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{a_0(t) \Phi_0(\mathbf{x})}_{\text{champ moyen}} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}.$$

- ▷ **Système dynamique avec $N_{gal} + N_{neq} + 1$ modes retenus (équations d'état)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d a_i(t)}{d t} = \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ \quad + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma(\mathbf{c}, t)}{d t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t). \\ a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \end{array} \right.$$

$\mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_{ijk}, \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_{ij}$ et \mathcal{G}_i dépendent de Φ , \mathbf{u}_c et Re

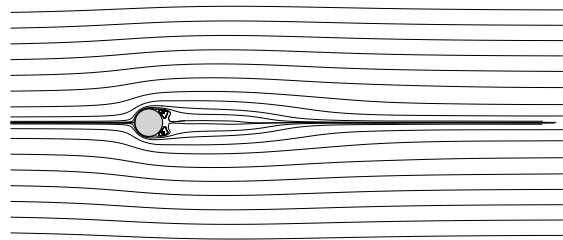
IV - Base POD réactualisée *Modes POD & non-équilibre*

Aspects physiques et dynamiques des modes utilisés

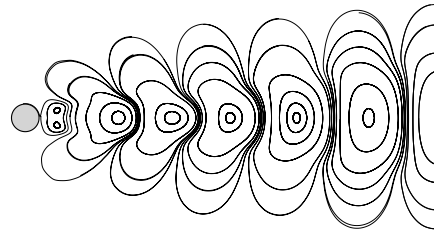
Aspects physiques	Modes	Aspects dynamiques
fonction de contrôle	\mathbf{u}_c	dynamique pré-déterminée
mode écoulement moyen	$\mathbf{u}_m, i = 0$	$a_0 = Cste$
modes POD Galerkin correspondent à la physique de l'écoulement	$i = 1$	Système dynamique modes déterminés par intégration du système dynamique (le mode $i = 0$ peut également être résolu et $a_0 \equiv a_0(t)$)
	$i = 2$	
	\dots	
	$i = N_{gal}$	
modes de non-équilibre correspondent à des directions privilegiées	$i = N_{gal} + 1$	
	\dots	
	$i = N_{gal} + N_{neq}$	

Tab. : Descriptif des aspects physiques et dynamiques des modes présents dans la décomposition sur la base POD, augmentée des modes de non-équilibre.

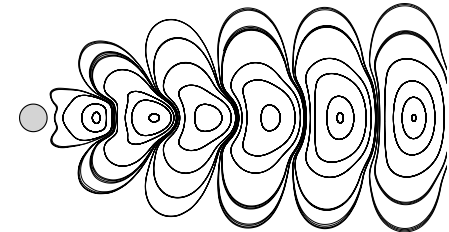
IV - Base POD réactualisée Modes POD & non-équilibre



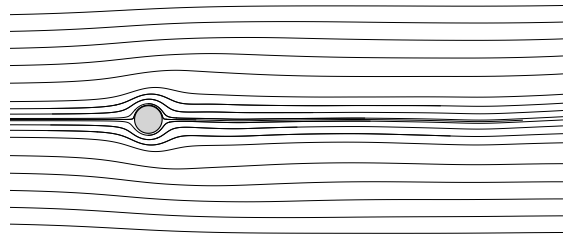
Éclt. contrôlé (I) moyen



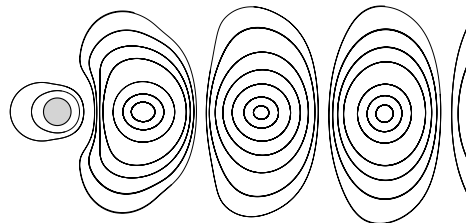
1er mode POD de I



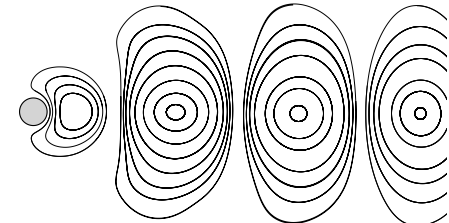
2nd mode POD de I



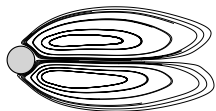
Éclt. contrôlé (II) moyen



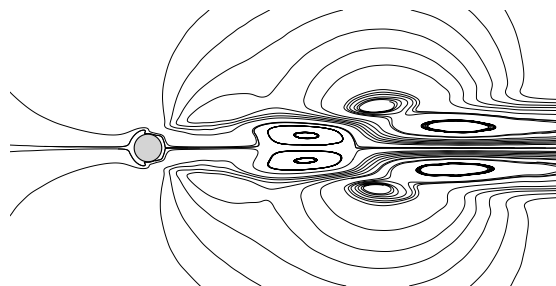
1er mode POD de II



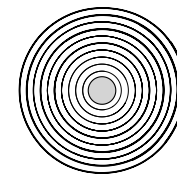
2nd mode POD de II



Mode shift de I vers II



Mode shift de I vers base



Fonction de contrôle

Fig. : Représentation de modes Galerkin, de la fonction de contrôle u_c , et de modes de non-équilibre présents dans la base POD

IV - Base POD réactualisée *Contrôle optimal*

▷ **Opérateur de traînée** : $\mathcal{C}_D : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \mapsto 2 \int_{\Gamma_c} \left(u_3 n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial x} n_x - \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial y} n_y \right) d\Gamma$$

▷ **Coefficients de traînée réel et modèle**

↪ Coefficient de traînée réel Navier-Stokes $C_D = \mathcal{C}_D(\mathbf{U})$ avec $\mathbf{U} = (u, v, p)^T$

↪ Coefficient de traînée modélisé par POD $\tilde{C}_D = \mathcal{C}_D(\tilde{\mathbf{U}})$ avec $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})^T$

▷ **Problème** : la pression \tilde{p} n'est pas connu

↪ La base POD est étendue au champ de pression : $\Phi = (\Phi, \Phi^p)^T$

$$\Rightarrow \text{Corrélations avec pression } C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} U_i(\mathbf{x}, t) U_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x}$$

▷ **Décomposition** : $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{c}, t) \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{gal}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes POD Galerkin}} + \underbrace{\sum_{i=N_{gal}+1}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x})}_{\text{modes de non-équilibre}}$

IV - Base POD réactualisée *Contrôle optimal*

▷ **Fonction objectif modélisée par POD** (coefficient de traînée moyen) :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i dt, \text{ avec } N_i = \mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\Phi_i)$$

▷ **Système dynamique adjoint** :

$$\begin{cases} \frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \frac{N_i}{T}, \\ \xi_i(T) = 0 \end{cases}$$

▷ **Conditions d'optimalité** :

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \nabla_{\mathbf{c}} \gamma dt$$

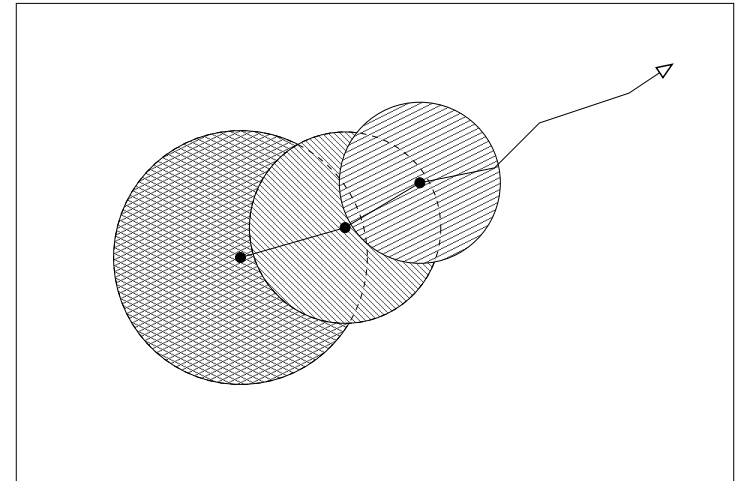
$$\text{avec } \mathcal{L}_i = -\frac{d\xi_i}{dt} \mathcal{D}_i + \xi_i \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j + 2\gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{G}_i \right)$$

IV - Base POD réactualisée *Méthodes résolution*

Quand avoir recours au modèle de Navier-Stokes pour "rafraîchir" la base POD ?

↪ **Déterminer un domaine de validité du modèle réduit**

- ▷ Domaine "infini" (pas de contraintes)
- ▷ Détermination empirique : méthode adaptative
- ▷ Détermination automatique : méthode à région de confiance (TRPOD)



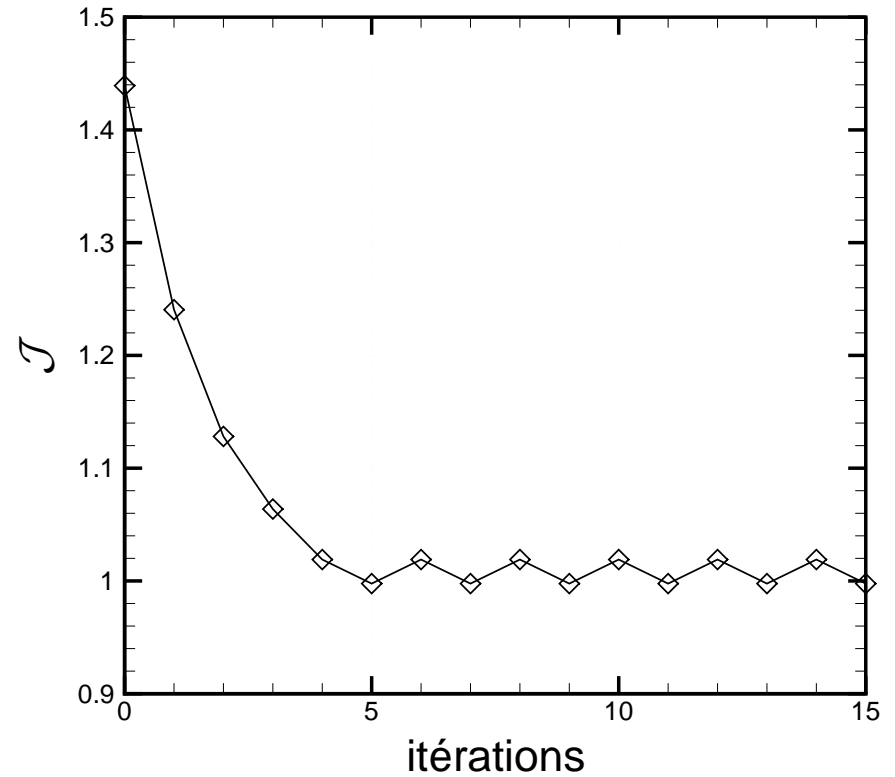
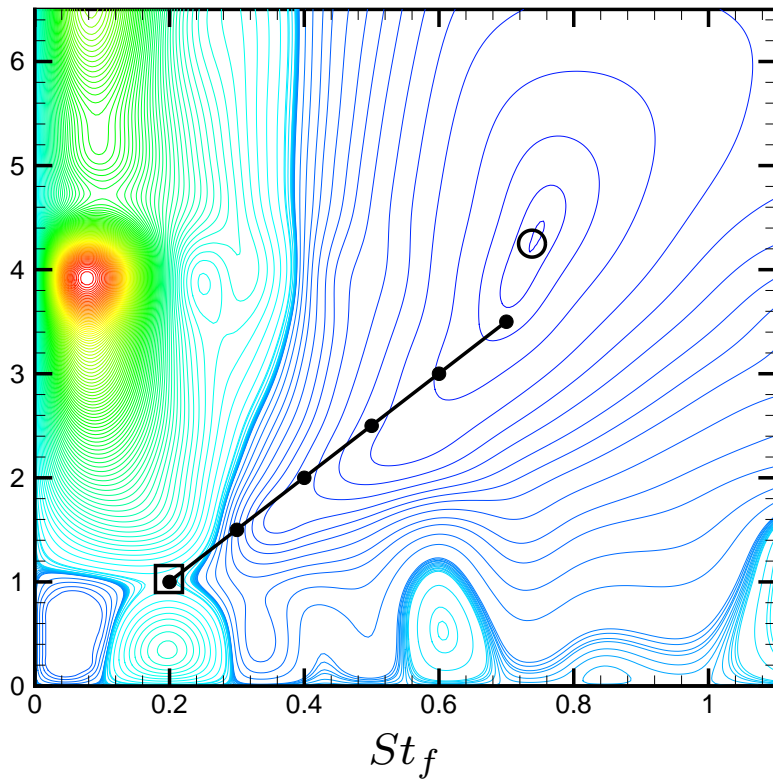
Avantages TRPOD

- ▷ Pas d'empirisme
- ▷ Preuves de convergence de la solution sous certaines conditions
- ▷ Coûts de calcul identiques à méthode adaptative

Conn, A.R., Gould, N.I.M. et Toint, P.L. (2000) : Trust-region methods. *SIAM, Philadelphia.*

IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 0,2$



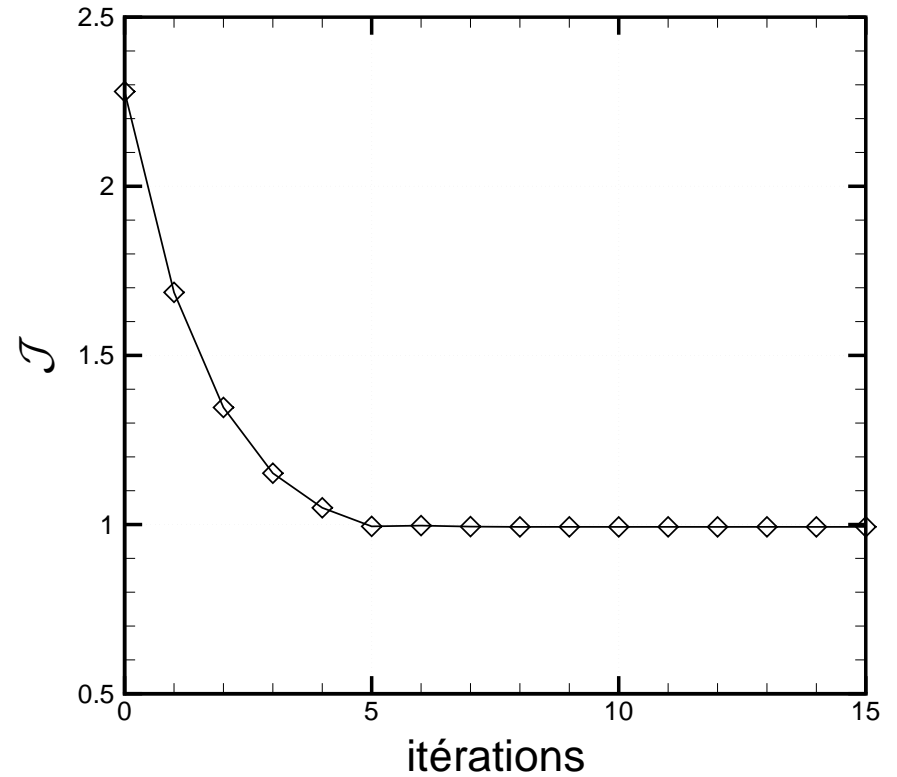
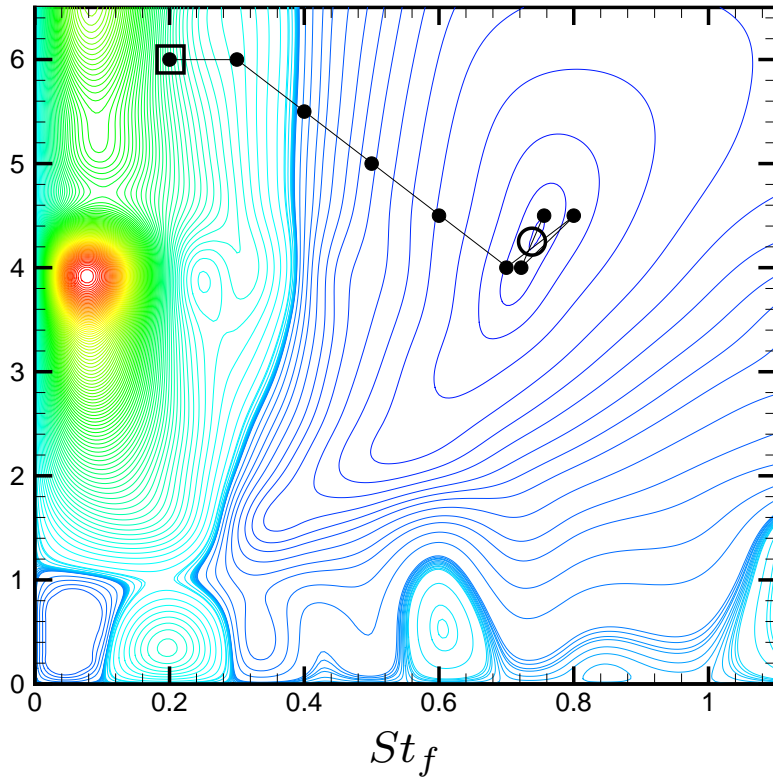
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 3,25$ et $St_f = 0,65$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 1,01$

Pas de convergence...

IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 0,2$



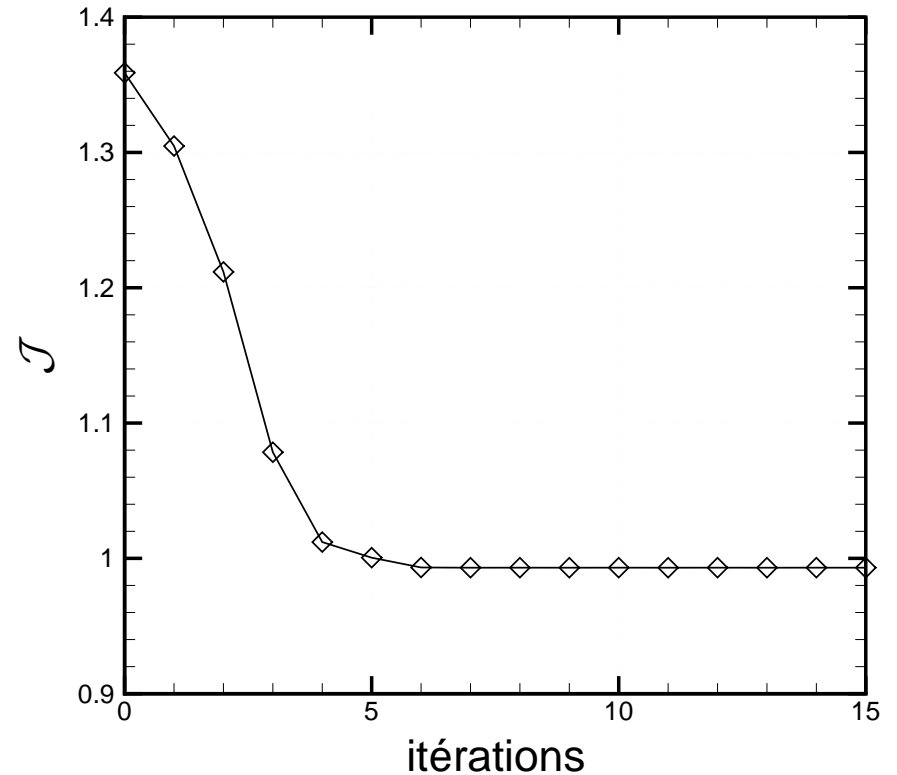
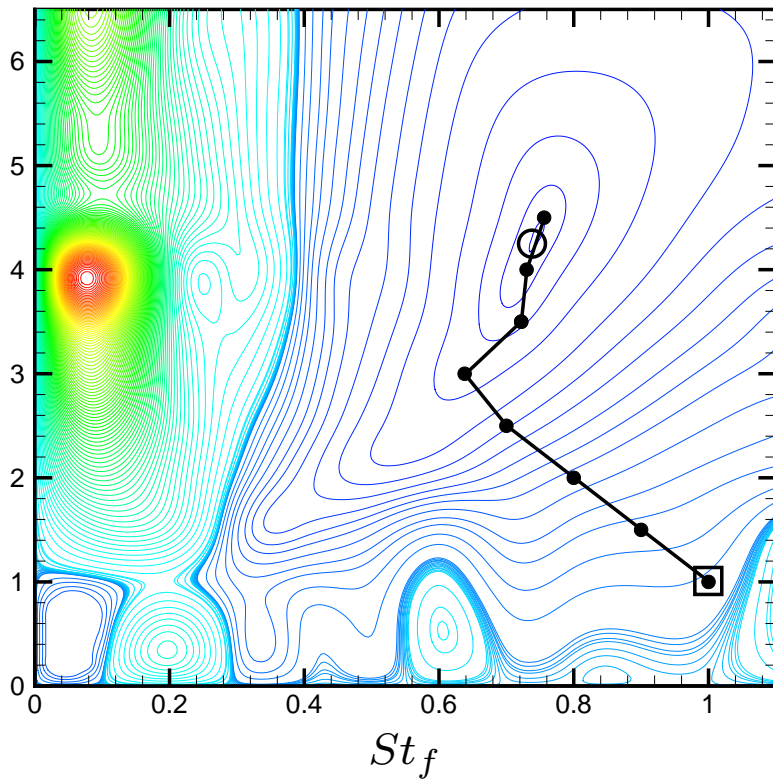
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 1,0$



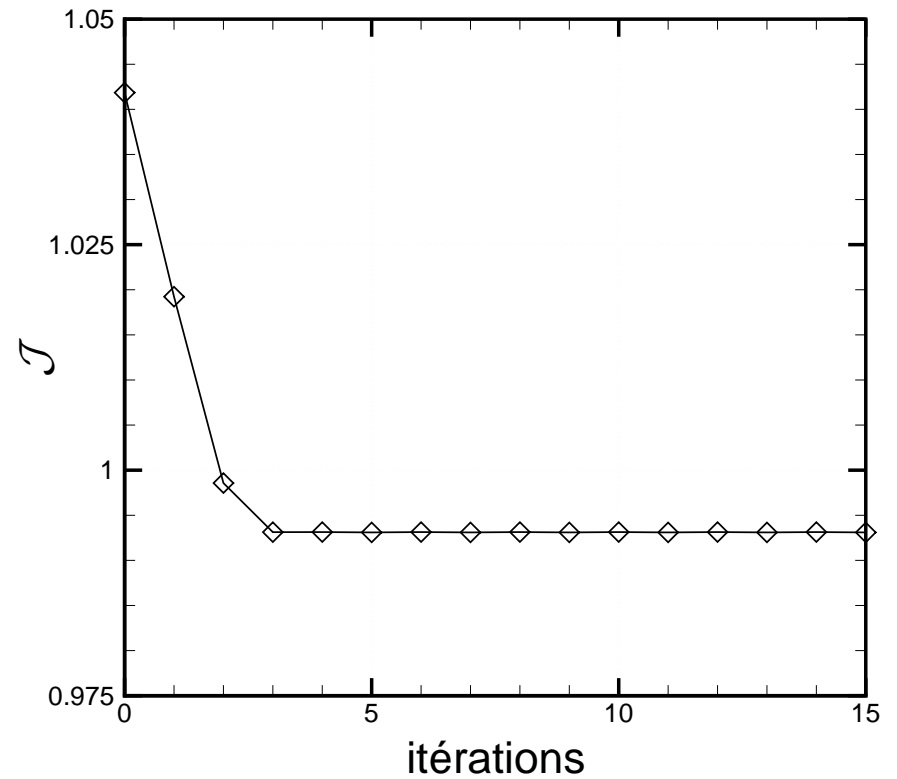
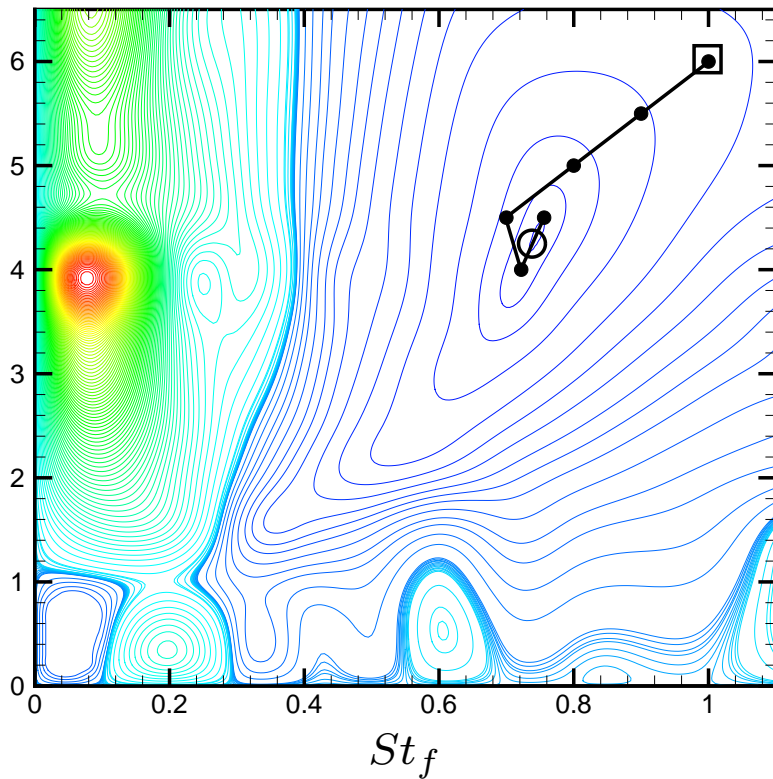
Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

IV - Base POD réactualisée *Méthode adaptative*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 1,0$



Paramètres de contrôle obtenus : oscillations autour de $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

Pas de convergence...

IV - Base POD réactualisée *Méthode TRPOD*

Initialisation : c_0 , résolution du modèle de Navier-Stokes, \mathcal{J}_0 . $k = 0$.

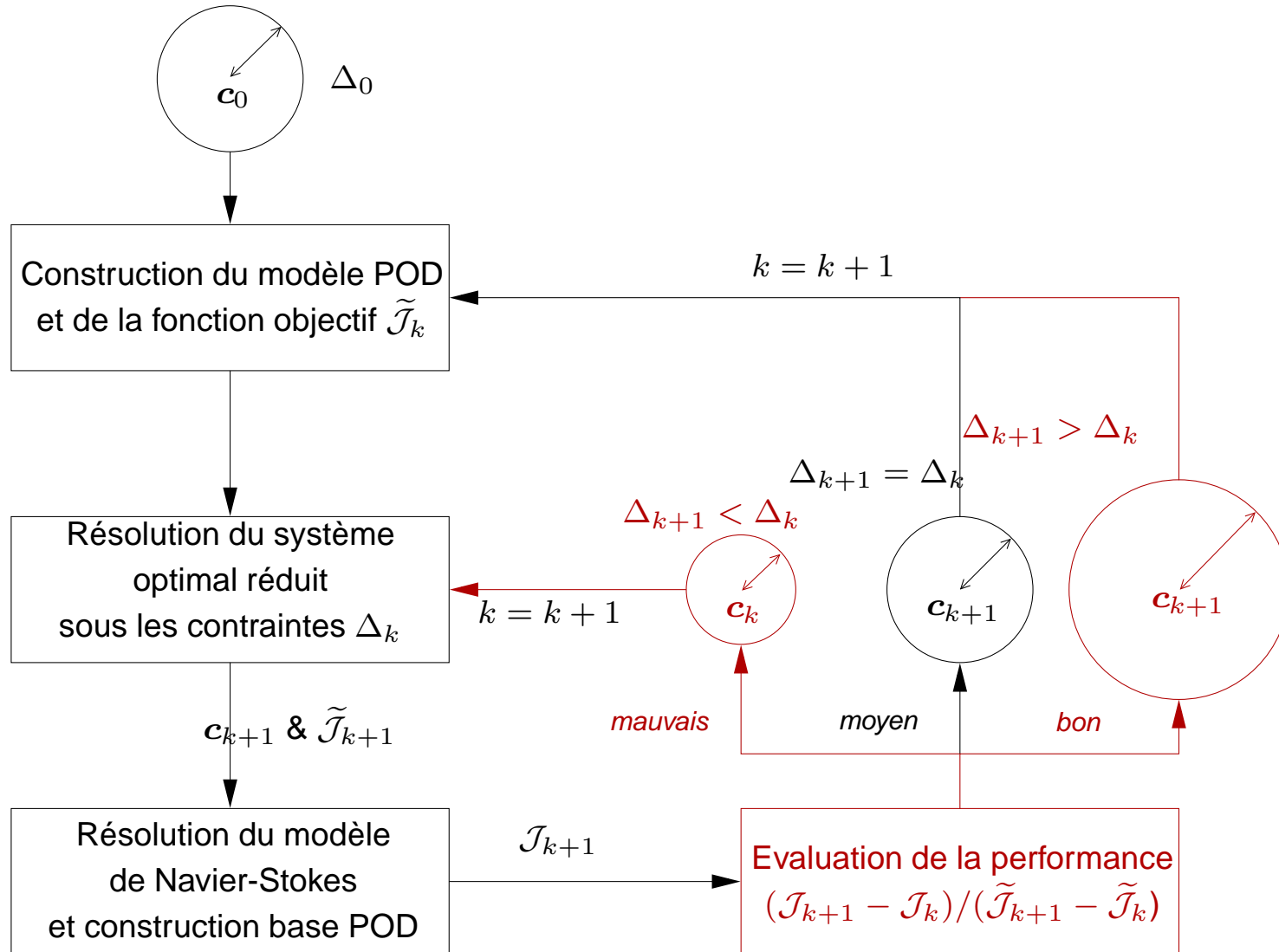
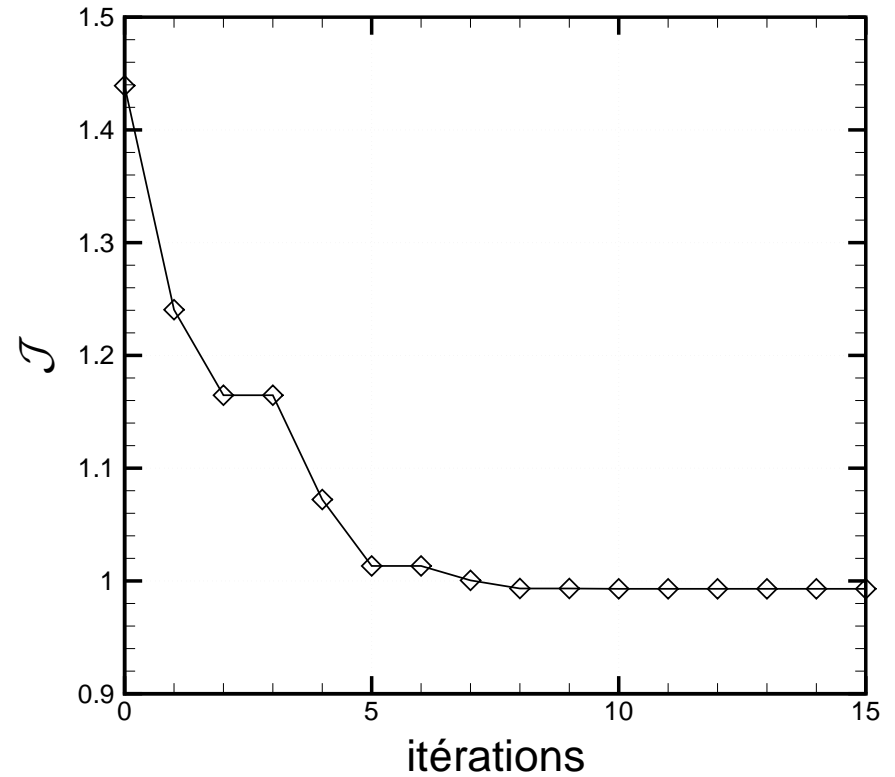
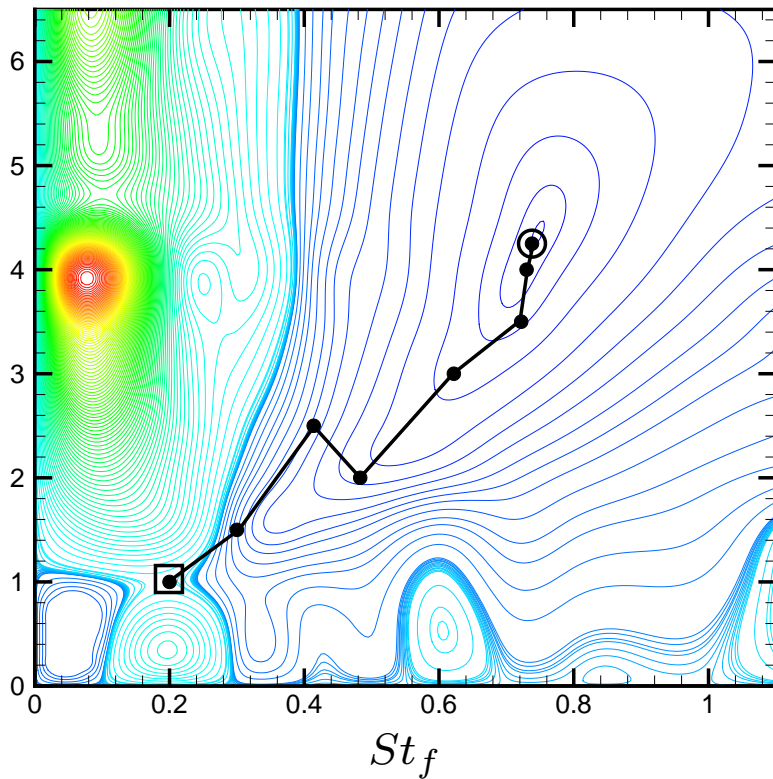


Fig. : Schématisation de la méthode à région de confiance.

IV - Base POD réactualisée *Méthode TRPOD*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 0,2$



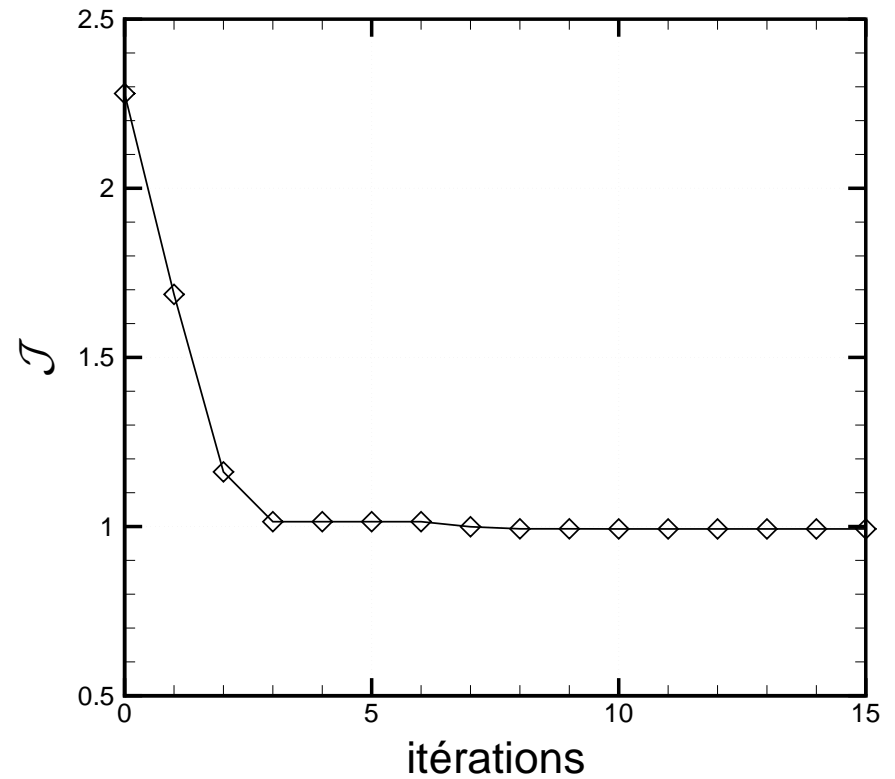
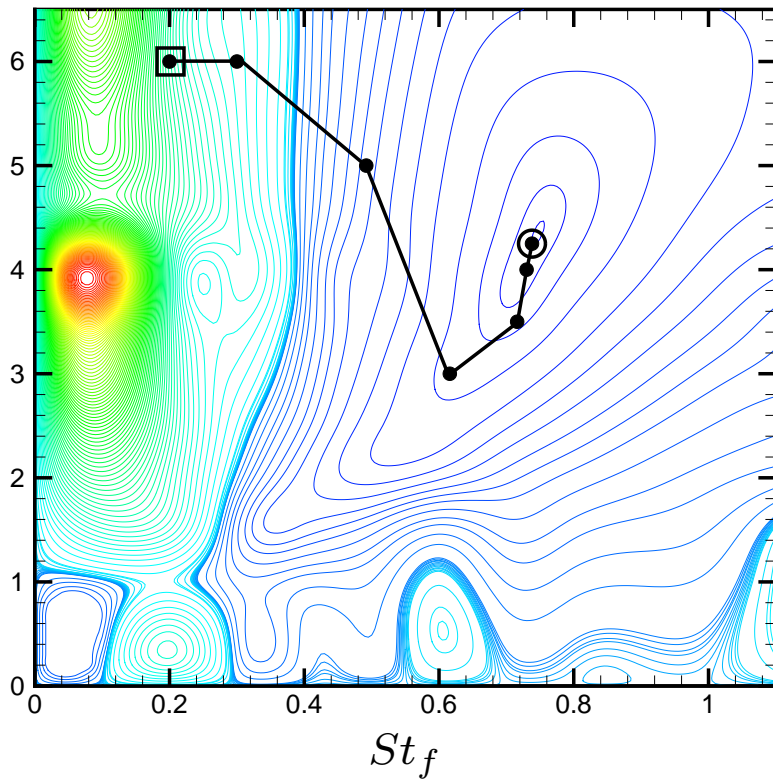
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

obtenus en uniquement 8 résolutions de Navier-Stokes

IV - Base POD réactualisée *Méthode TRPOD*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 0,2$



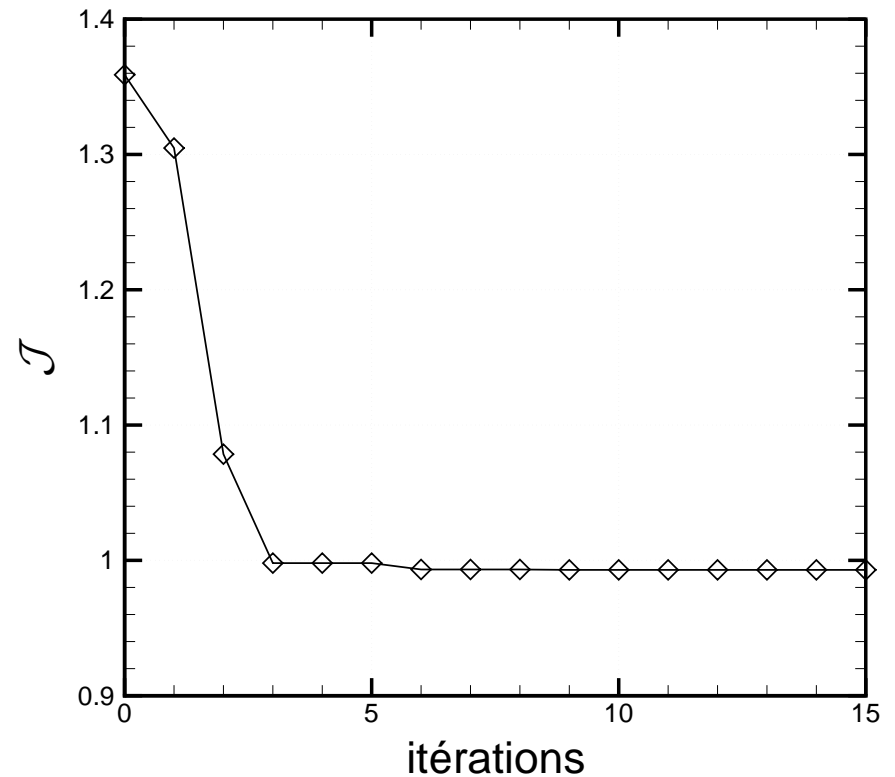
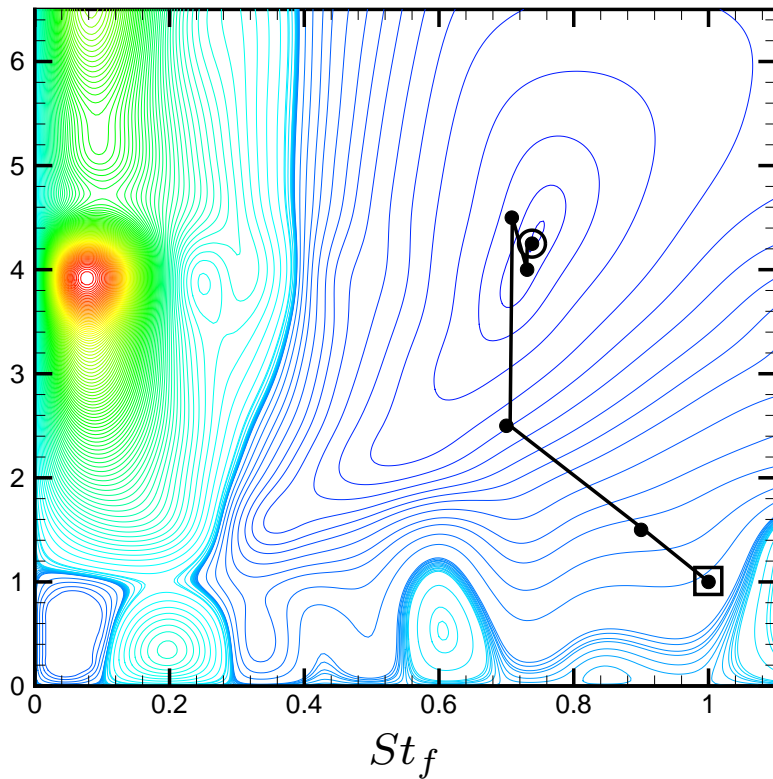
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

obtenus en uniquement 6 résolutions de Navier-Stokes

IV - Base POD réactualisée *Méthode TRPOD*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St_f = 1,0$



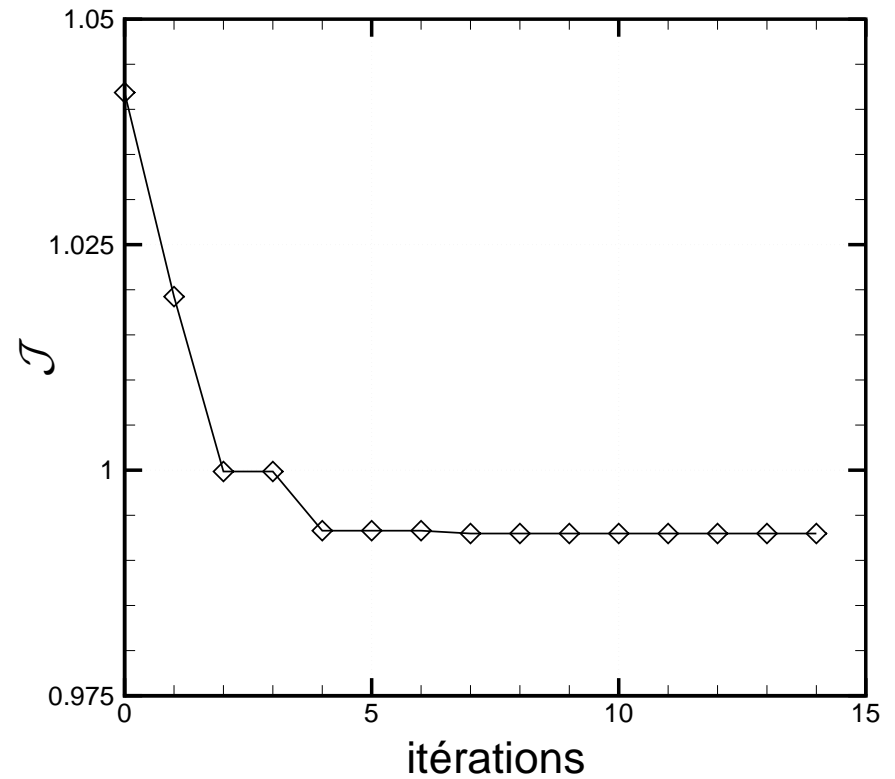
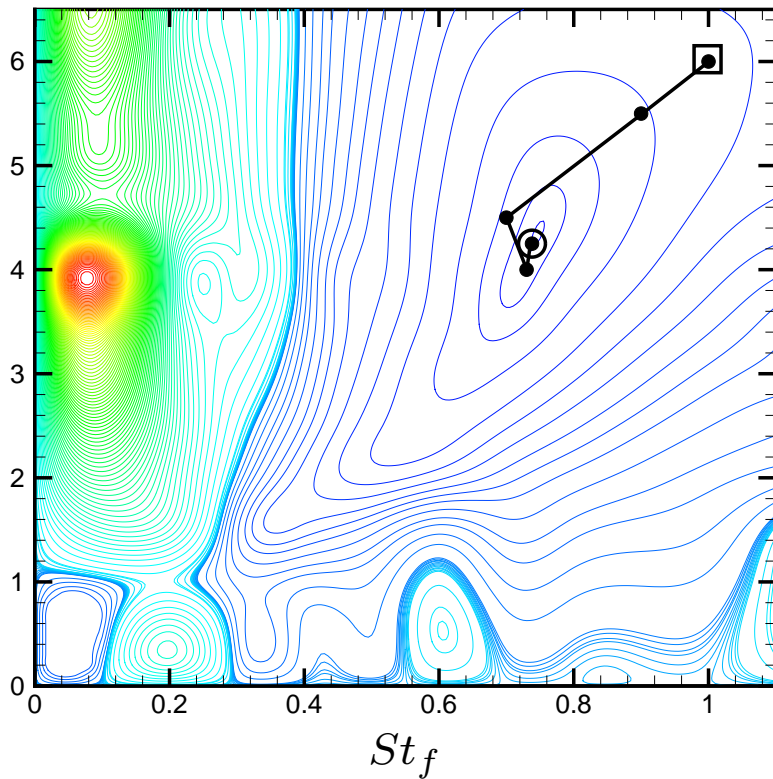
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

obtenus en uniquement 5 résolutions de Navier-Stokes

IV - Base POD réactualisée *Méthode TRPOD*

Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St_f = 1,0$



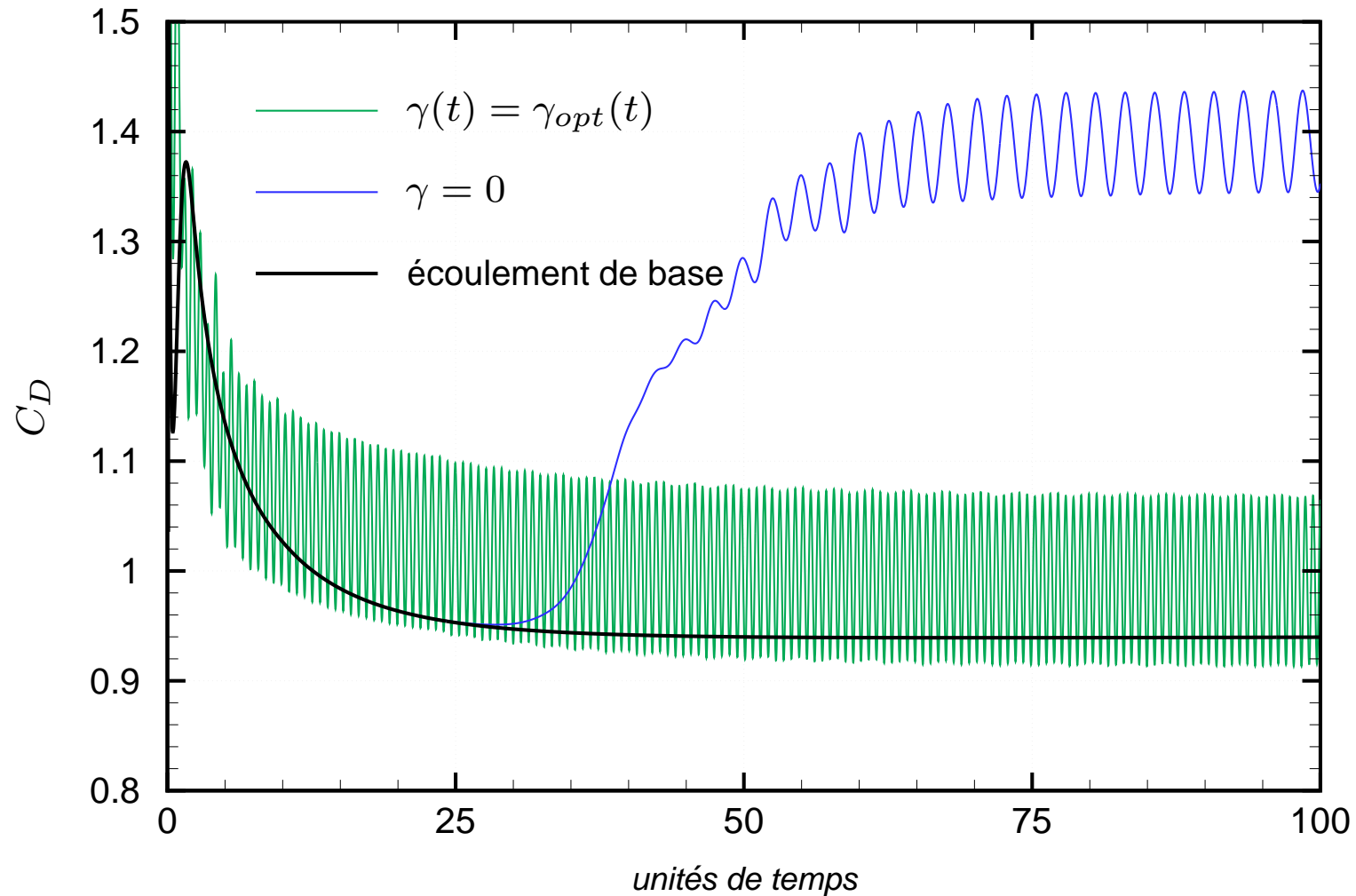
Paramètres de contrôle optimaux : $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

Convergence : coefficient de traînée moyen : $\mathcal{J} = 0,993$

obtenus en uniquement 4 résolutions de Navier-Stokes

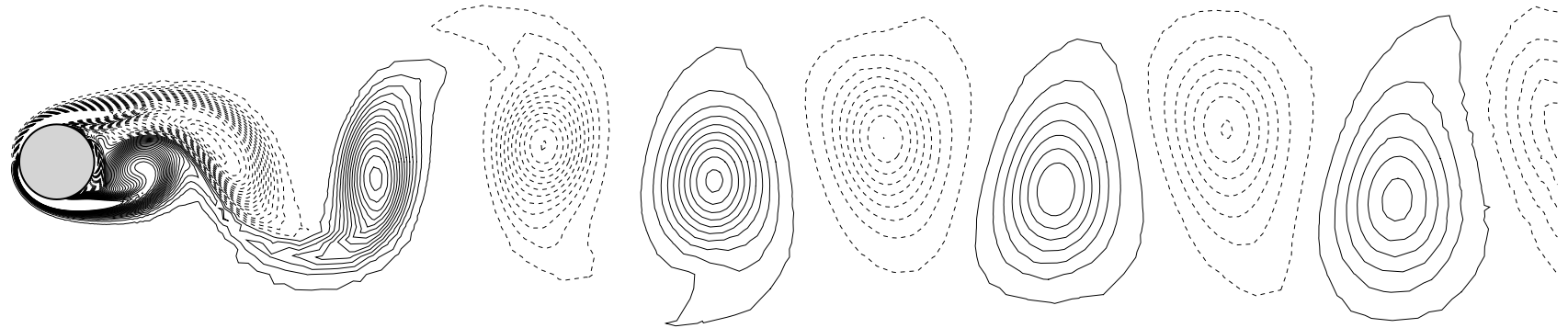
IV - Base POD réactualisée *Résultats numériques*

Loi de contrôle optimale : $\gamma_{opt}(t) = A \sin(2\pi St_f t)$ avec $A = 4,25$ et $St_f = 0,74$

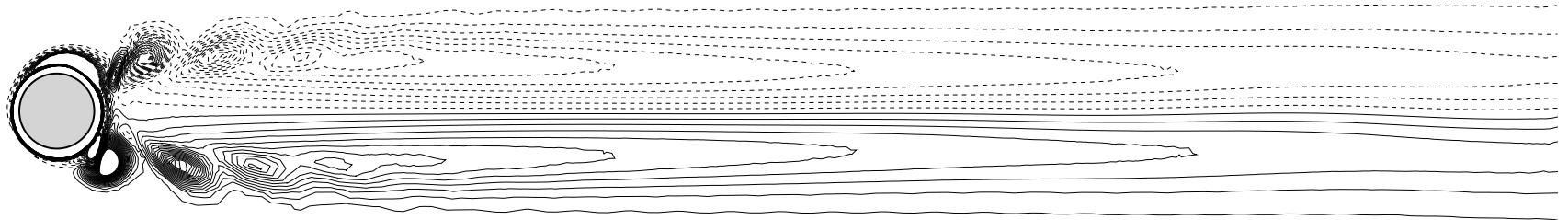


Diminution relative du coefficient de traînée de 30% ($\mathcal{J}_0 = 1,4 \Rightarrow \mathcal{J}_{opt} = 0,99$)

IV - Base POD réactualisée *Résultats numériques*



Écoulement non contrôlé, $\gamma = 0$.



Écoulement contrôlé, $\gamma = \gamma_{opt}$.

Fig. : *Isocontours de vorticité ω_z .*

Écoulement contrôlé : Sillage proche fortement instationnaire, sillage lointain (après 5 diamètres) stationnaire et symétrique → écoulement de base stationnaire instable

IV - Base POD réactualisée *Coûts de calcul*

▷ Comparaison résultats : POD ROM avec réactualisation / DNS

- Contrôle optimal Navier-Stokes par He *et al.* (2000) :

↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 3$ et $St = 0,75$.
⇒ 30% de réduction de traînée.

- Contrôle *optimal* POD ROM :

↪ loi de contrôle harmonique avec $A = 4,25$ et $St = 0,74$.
⇒ 30% de réduction de traînée.

▷ Réduction stockage mémoire :

- **1 600 fois moins de variables** par POD ROM que par NSE !

▷ Réduction temps de calcul :

- **4 fois inférieur** par POD ROM que par NSE

V - Amélioration des performances

Contrôle partiel sur une partie amont du cylindre

★★ Phys. Fluids 18 (2), 2006 ★★

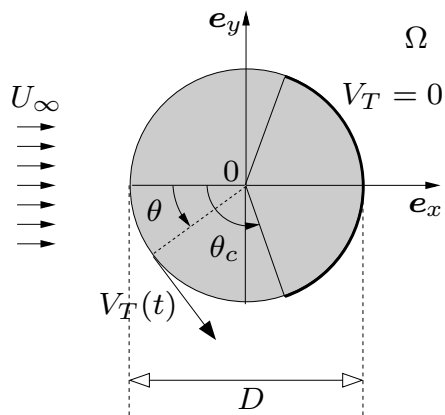


Fig. : Configuration.

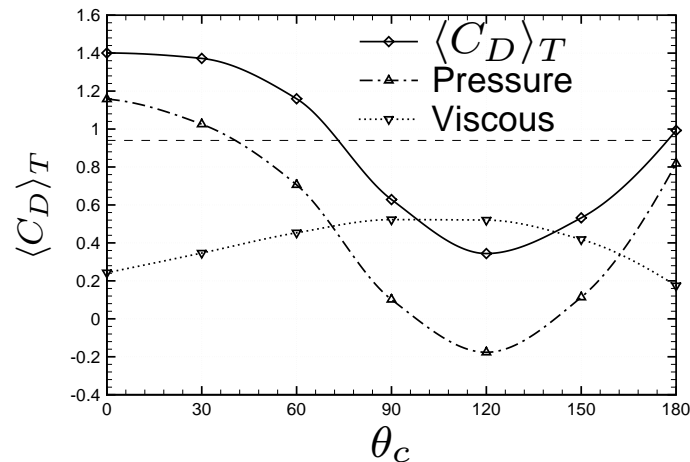


Fig. : Coeff. traînée vs. angle θ_c .

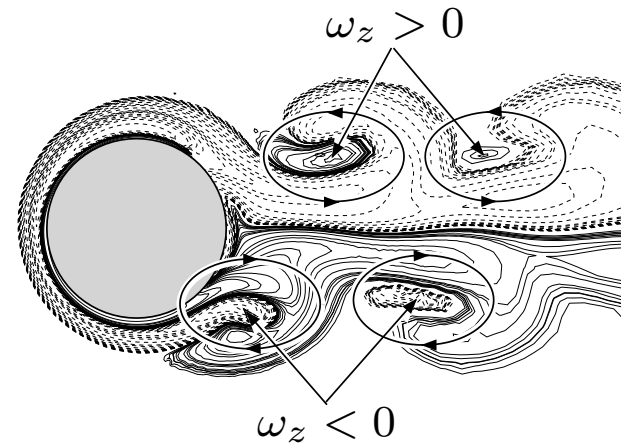
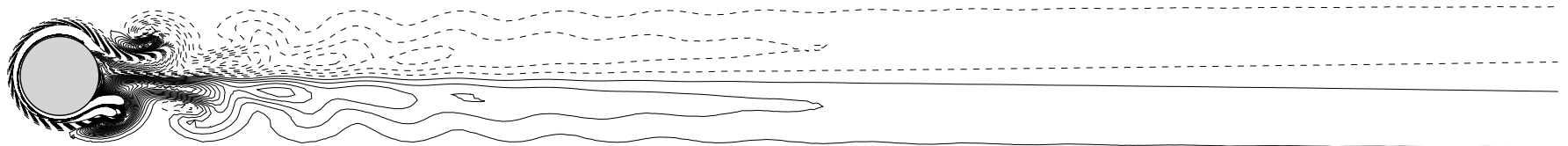


Fig. : $\theta_c = 120^\circ$, $C_D = 0.33$



⇒ Allée de Von Karman inversée : similaire écoulement généré par queue de poisson

V - Amélioration des performances

Puissance dépensée pour le contrôle

★★ Phys. Fluids 18 (8), 2006 ★★

- ▷ Besoin de peu de d'énergie pour contrôler les instabilités
 - ↪ Mais où agir ???

- ▷ Besoin d'injecter beaucoup d'énergie
 - ↪ Contrôle rotation : essentiel de puissance dissipée dans couche de Stokes

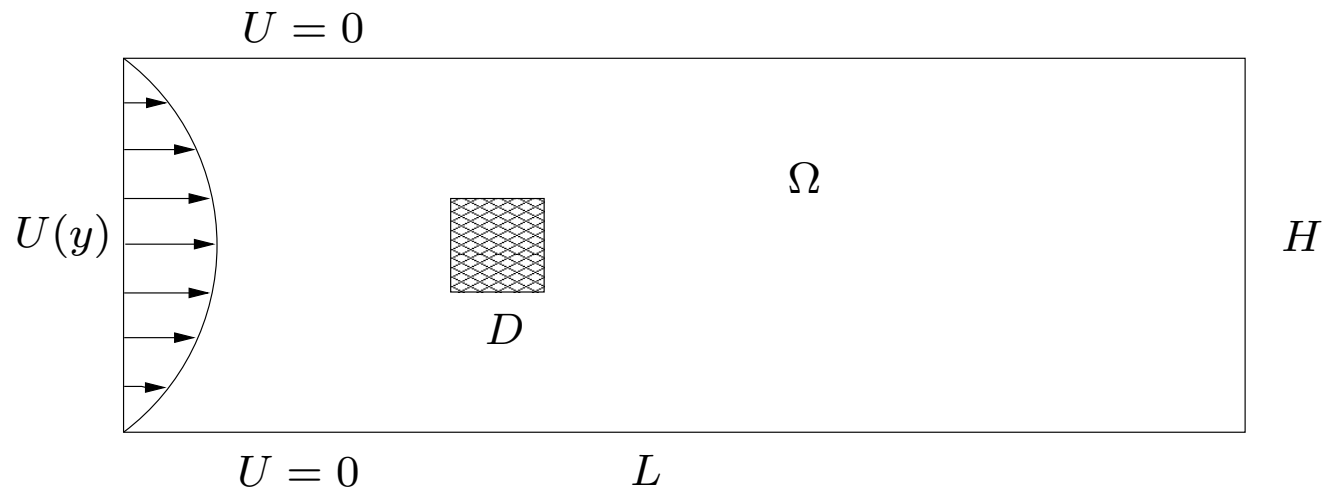
- ▷ Relation analytique :
$$\widetilde{\mathcal{P}}_C = \rho U_\infty^3 R l_z \sqrt{\pi} \frac{\theta_c A^2 \sqrt{St_f}}{\sqrt{Re}}$$
 - ↪ Très bonne concordance analytique / numérique
 - ↪ Gain énergétique relatif égal à 15% !

VI - Amélioration du modèle réduit

IMB-MAB/ INRIA Futurs MC2 - A. Iollo et C.-H. Bruneau

▷ Configuration d'écoulement

- Écoulement laminaire 2D autour d'un barreau dans un canal confiné
- Fluide visqueux, incompressible et newtonien
- Pas de contrôle (pour le moment ...)



▷ Méthode de résolution numérique

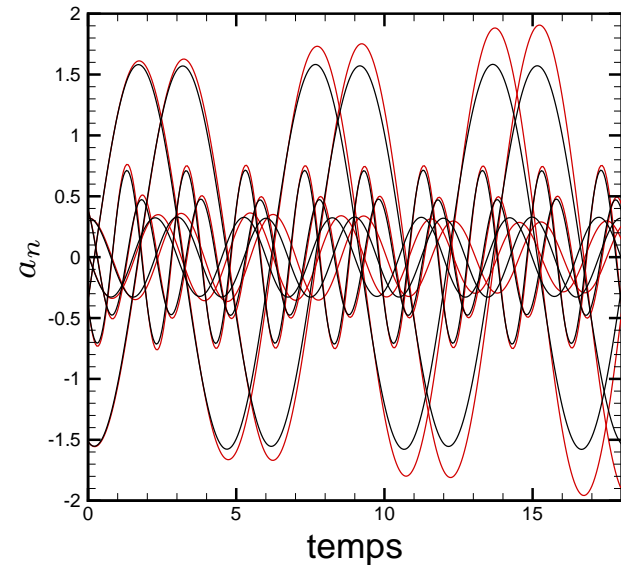
- Méthode de pénalisation pour le barreau
- Méthode multigilles V-cycles en espace
- Méthode de Gear en temps

Code de C.-H. Bruneau

VI - Amélioration des modèles réduits

1 - Problème Galerkin POD ROM, $a_n(t)$:

- Mauvaise représentation dynamique
 - Cycles instables
- Besoin de calibration (viscosités)
 - Numériquement coûteux !
 - Préservation groupes d'invariance ?



▷ Détermination d'un modèle réduit précis et rapide pour les coefficients $a_n(t)$

↪ **Le modèle réduit doit respecter (au moins) 3 lois :**

1. Conservation de la quantité de mouvement (avec pression !)
2. Conservation de la masse
3. Conservation du débit (pour écoulements confinés notamment)

VI - Amélioration des modèles réduits

► Conservation de la quantité de mouvement

Modèle détaillé (exact) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}$$

Discrétisation temporelle :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n$$

Projection sur base réduite : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$ et $p(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \psi_i(\mathbf{x})$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(n+1)} \left(\frac{\phi_j}{\Delta t} + \nabla \psi_j - \frac{1}{Re} \Delta \phi_j \right) = \sum_{i=j}^N a_j^{(n)} \frac{\phi_j}{\Delta t} + \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(n)} \phi_j^{(\mathbf{u})} \cdot \nabla \right) \sum_{k=1}^N a_k^{(n)} \phi_k^{(\mathbf{u})}$$

VI - Amélioration des modèles réduits

Après simplifications :

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(n+1)} \left(\frac{\phi_i}{\Delta t} + \nabla \psi_i - \frac{1}{Re} \Delta \phi_i \right) = \sum_{j=1}^N a_j^{(n)} \frac{\phi_j}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j^{(n)} \left(\phi_j^{(\mathbf{u})} \cdot \nabla \right) \phi_k^{(\mathbf{u})} a_k^{(n)}$$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(n+1)} \chi_j = \sum_{j=1}^N a_j^{(n)} \xi_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j^{(n)} \zeta_{jk} a_k^{(n)}$$

Moindres carrés :

$$\sum_{j=1}^N \chi_i^T \chi_j a_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N \chi_i^T \xi_j a_j^{(n)} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j^{(n)} \chi_i^T \zeta_{jk} a_k^{(n)}$$

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}^{qdm} a_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j^{(n)} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_j^{(n)} a_k^{(n)}$$

↪ Modèle réduit ne vérifie *a priori* pas la conservation de la masse ...

VI - Amélioration des modèles réduits

► Conservation de la masse

Modèle détaillé (exact) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Projection sur base réduite :

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(n+1)} \nabla \cdot \phi_j = \mathbf{0}$$
$$\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \phi_j)^T \nabla \cdot \phi_j a_j^{(n+1)} = \mathbf{0}$$
$$\sum_{j=1}^N L_{ij}^{div} a_j^{(n+1)} = \mathbf{0}$$

Modèle réduit modifié :

$$\sum_{j=1}^N (\alpha L_{ij}^{qdm} + \beta L_{ij}^{div}) a_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N \alpha B_{ij} a_j^{(n)} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha C_{ijk} a_j^{(n)} a_k^{(n)}$$

↪ Il reste à imposer le débit constant (contrainte importante pour minimisation résidus)

VI - Amélioration des modèles réduits

► Conservation du débit

Pour le problème de l'écoulement confiné 2D :

$$\int_{\mathcal{S}} u \, d\mathcal{S} = Cste$$
$$\sum_{i=1}^N a_j(t) \int_{\mathcal{S}} \phi_j^u \, d\mathcal{S} = Cste$$
$$\sum_{j=1}^N \frac{da_j}{dt} \int_{\mathcal{S}} \phi_j^u \, d\mathcal{S} = 0$$
$$\sum_{j=1}^N L_{ij}^{deb} a_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N L_{ij}^{deb} a_j^{(n)}$$

Modèle réduit complet :

$$\sum_{j=1}^N (\alpha L_{ij}^{qdm} + \beta L_{ij}^{div} + \gamma L_{ij}^{deb}) a_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N (\alpha B_{ij} + \gamma L_{ij}^{deb}) a_j^{(n)} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha C_{ijk} a_j^{(n)} a_k^{(n)}$$

VI - Amélioration des modèles réduits

- **Cycles intrinsèquement stables ! \Rightarrow retour vers attracteur NS imposé !**

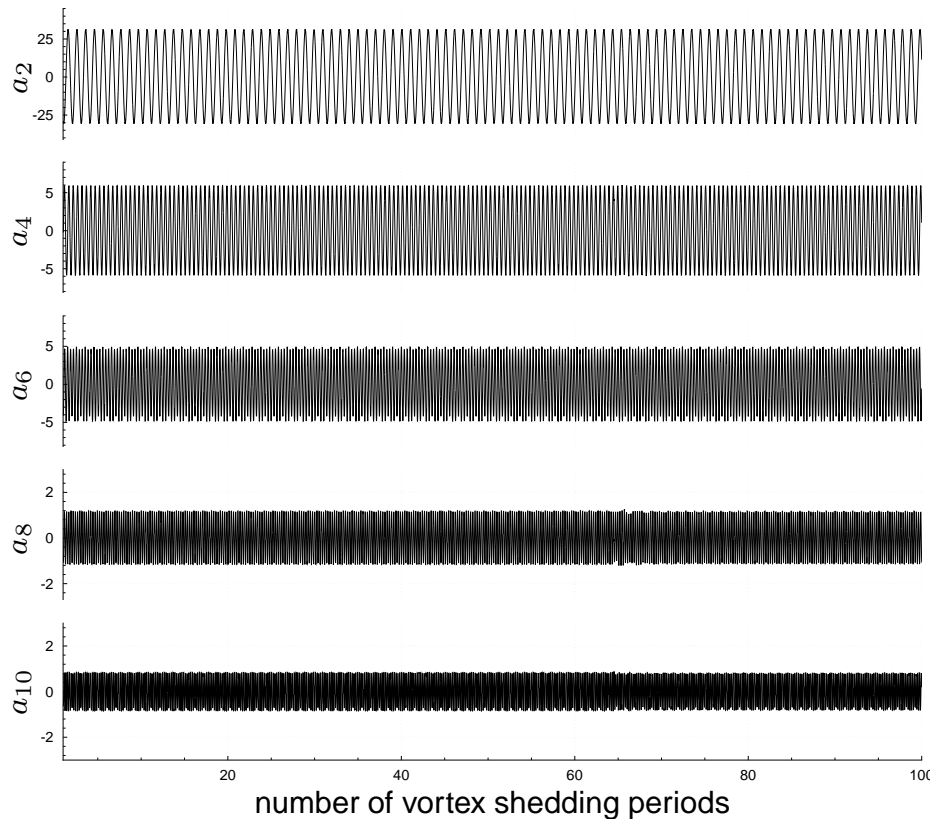


Fig. : *Evolution temporelle des coefficients POD : 100 périodes de Von Karman*

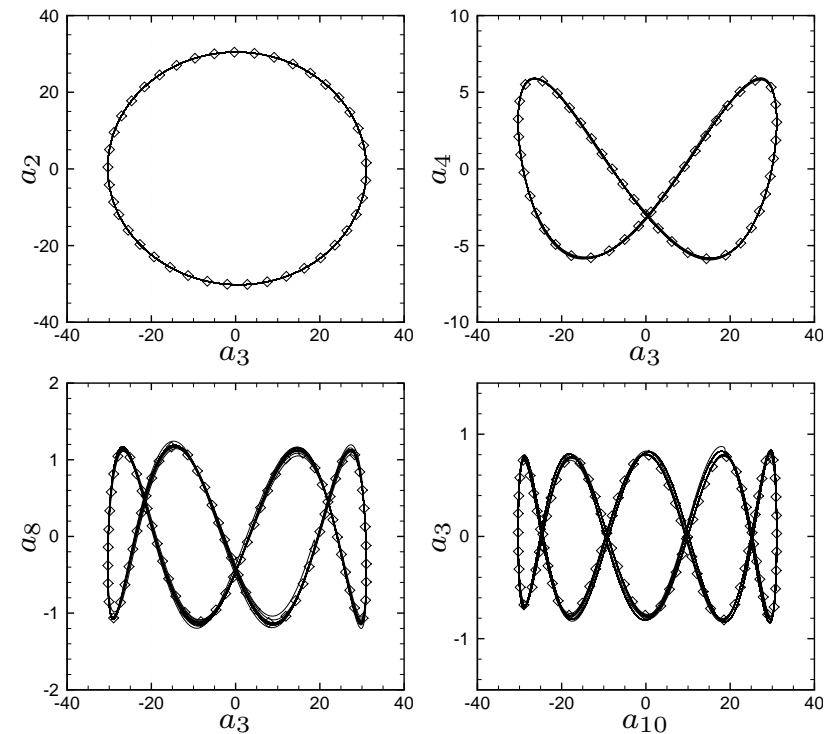
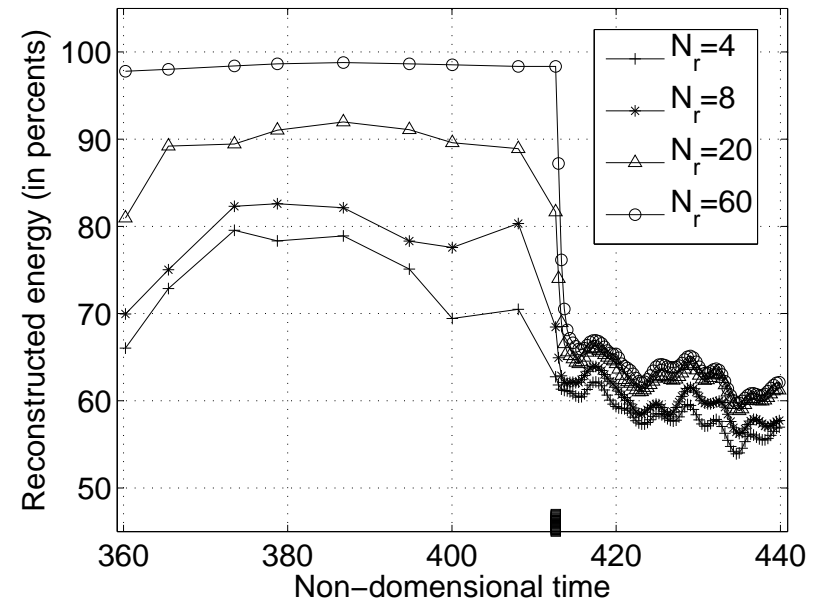
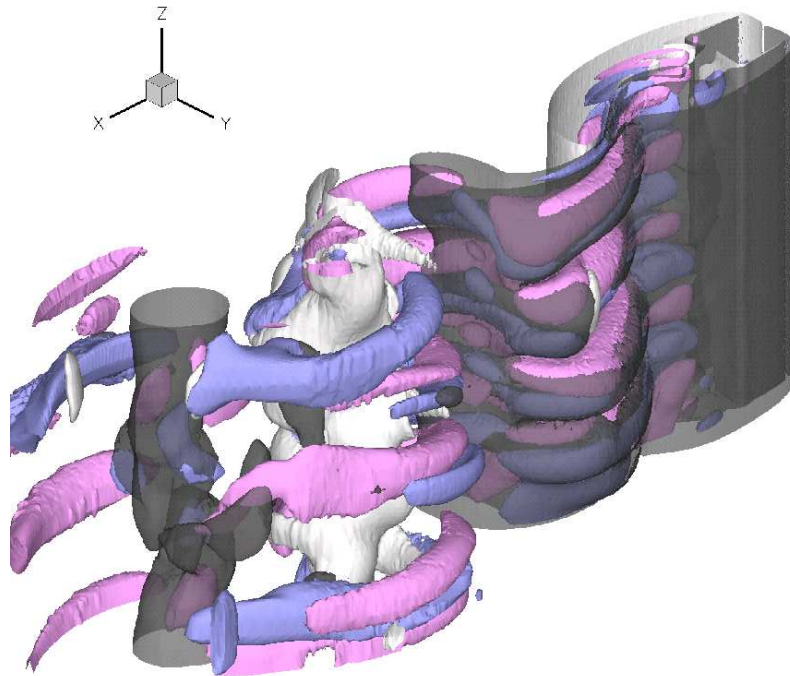


Fig. : *Cycles limites des coefficients POD : 1 000 périodes de Von Karman*

VI - Amélioration des modèles réduits

2 - Problème base POD, $\Phi_n(x)$: mauvaise représentation écoulements 3D turbulents en dehors de la base de données



Figures et résultats issus de Buffoni *et al.* Journal of Fluid Mech. **569** (2006)

- Problèmes contrôle écoulements 3D turbulents
- Propriétés de turbulence érronées (spectre, *etc*)

VI - Amélioration des modèles réduits

▷ **Construction d'une base $\Phi_n(\mathbf{x})$ qui s'adapte à la dynamique** (\approx maillages adaptatifs)

○ **Modification base existante** : évolution des statistiques $\Rightarrow \varphi : \Phi^{(k)} \mapsto \Phi^{(k+1)}$

1. Modification de l'ensemble de données $[U(\mathbf{x}, t_1) U(\mathbf{x}, t_2) \dots U(\mathbf{x}, t_{N_r})]$

$$\widehat{U}^{[1, \dots, N_r]}(\mathbf{x}, t_k) = \sum_{n=1}^{N_r} a_n(t_k) \phi_n(\mathbf{x}),$$

Modification d'un snapshot

$$U(\mathbf{x}, t_s) = \widehat{U}^{[1, \dots, N_r]}(\mathbf{x}, t_s) + U_s^\perp(\mathbf{x}, t_s).$$

D'une façon générale, on a :

$$\widetilde{U}(\mathbf{x}, t_k) = \widehat{U}^{[1, \dots, N_r]}(\mathbf{x}, t_k) + \delta_{ks} U^\perp(\mathbf{x}, t_s),$$

VI - Amélioration des modèles réduits

2 Modification de la matrice de corrélations temporelles :

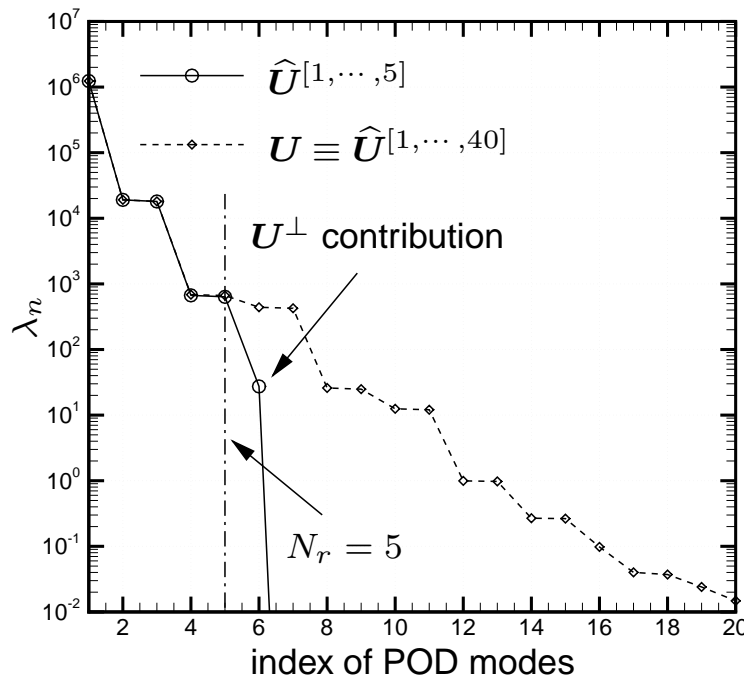
Pour réduire les coûts de calcul \tilde{U}_k au lieu de U_k .

$$\begin{aligned}
 C(t_k, t_l) &= \left(\tilde{U}(\mathbf{x}, t_k), \tilde{U}(\mathbf{x}, t_l) \right)_{\Omega} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{N_r} a_i(t_k) \phi_i(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^{\perp}(\mathbf{x}, t_k), \sum_{j=1}^{N_r} a_j(t_l) \phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^{\perp}(\mathbf{x}, t_l) \right)_{\Omega} \\
 &= \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} a_i(t_k) a_j(t_l) \underbrace{(\phi_i(\mathbf{x}), \phi_j(\mathbf{x}))_{\Omega}}_{=\delta_{ij}} + \left(\mathbf{U}^{\perp}(\mathbf{x}, t_k), \mathbf{U}^{\perp}(\mathbf{x}, t_l) \right)_{\Omega} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{N_r} a_i(t_k) \underbrace{(\phi_i(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{\perp}(\mathbf{x}, t_l))_{\Omega}}_{=0} + \sum_{j=1}^{N_r} a_{lj} \underbrace{(\mathbf{U}^{\perp T}(\mathbf{x}, t_k), \phi_j(\mathbf{x}))_{\Omega}}_{=0}.
 \end{aligned}$$

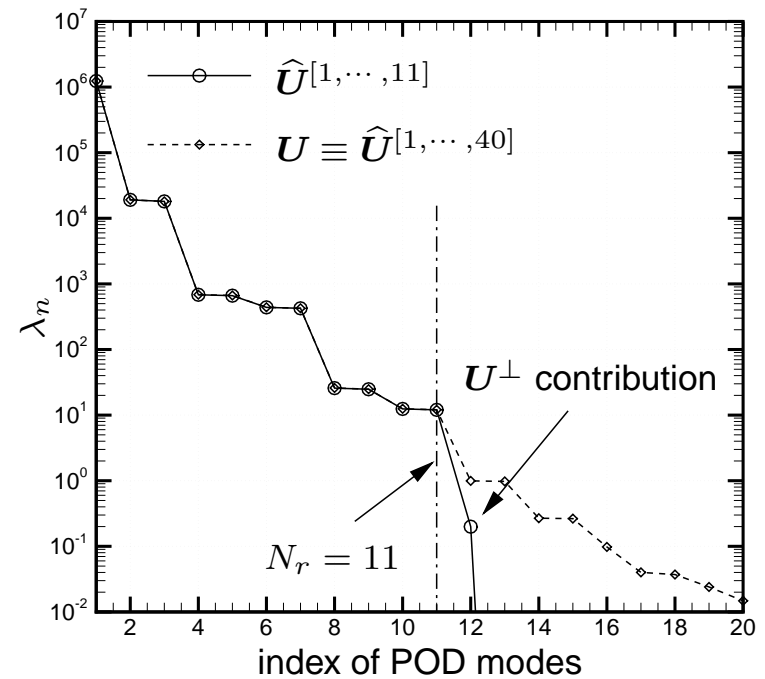
Approximation finale :

$$C(t_k, t_l) = \sum_{i=1}^{N_r} a_i(t_k) a_i(t_l) + \delta_{ks} \delta_{ls} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n_c} U^{\perp i}(\mathbf{x}, t_s) U^{\perp i}(\mathbf{x}, t_s) d\mathbf{x}.$$

VI - Amélioration des modèles réduits



$N_r = 5$



$N_r = 11$

Fig. : Comparison of the temporal correlation tensor eigenvalues evaluated from the exact field, U , and from the N_r -modes approximated one, $\hat{U}[1, \dots, N_r]$.

↪ Très bonne concordance, méthode très peu coûteuse numériquement!

VI - Amélioration des modèles réduits

3 Actualisation de la base POD :

$$\phi_k^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_k^{(n+1)}} \sum_{j=1}^N \tilde{U}^{(n)}(\mathbf{x}, t_j) a_k^{(n+1)}(t_j)$$

$$\phi_k^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_k^{(n+1)}} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^N a_k^{(n+1)}(t_j) a_i^{(n)}(t_j) \phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{U}^\perp{}^{(n)}(\mathbf{x}, t_s) a_k^{(n+1)}(t_s).$$

$$\phi_k^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_r} K_{ki}^{(n+1)} \phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}_k^{(n+1)}(\mathbf{x}).$$

En utilisant $S^{(n+1)}$ avec elements $S_{ij}^{(n+1)} = S_i^{j(n+1)}$, la nouvelle base est obtenue par l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie comme :

$$\varphi : \phi^{(n)} \mapsto \phi^{(n+1)} = \phi^{(n)} K^{(n+1)} + S^{(n+1)}$$

Incrémentation $n = n + 1$.

VI - Amélioration des modèles réduits

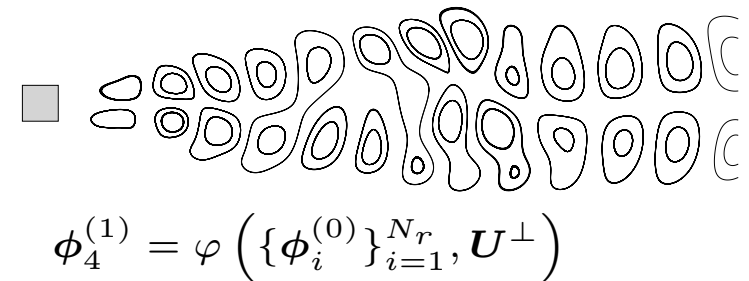
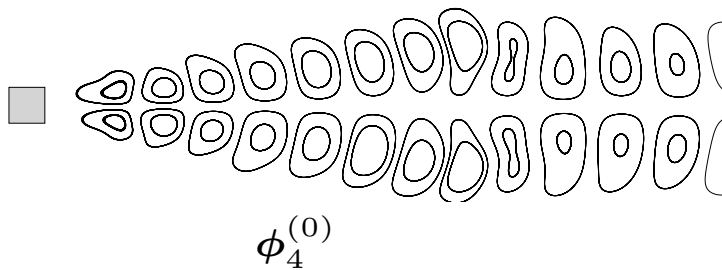
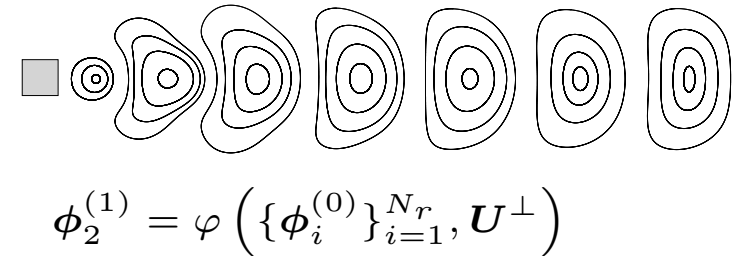
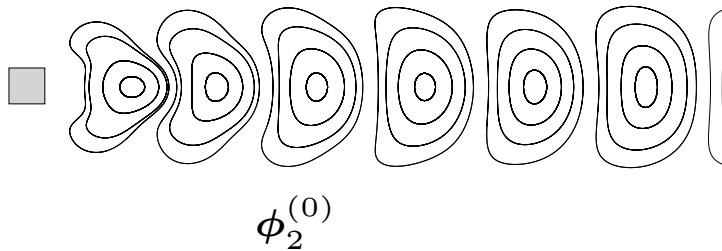


Fig. : Modification of the POD basis functions under the application of the linear transformation φ . Streamline representation of the velocity fields. . Bifurcation from $Re = 100$ to $Re = 200$.

↔ La base POD s'adapte à l'écoulement courant

VI - Amélioration des modèles réduits

▷ Construction d'une base $\Phi_n(\boldsymbol{x})$ qui s'adapte à la dynamique (\approx maillages adaptatifs)

○ **Enrichissement base** : ajout nouveaux modes dans sous espace de Krylov

$$\boldsymbol{U}_{pod} = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\boldsymbol{x})$$



1^{er} mode Krylov

$$\Phi_{N+1} = \mathcal{R} = L(\boldsymbol{U}_{pod}) - \boldsymbol{F}$$



2nd mode Krylov

$$\Phi_{N+2} = L(\mathcal{R}) - \boldsymbol{F}$$

↪ Malheureusement, pas grande contribution de ces modes pour navier-Stokes ...

↪ Mais très bon pour Burgers 1D!

⇒ Problème construction base d'Arnoldi ? Quels modes associer à u , à v et à p ?

Conclusions

▷ Observations physiques

- Contrôle cylindre par rotation harmonique adopté car "intéressant"
- Identification écoulements "lock-on" (synchronisation fréquences)

▷ Détermination de modèles réduits précis et fiables

- Galerkin POD ROM instable → stabilisation par ajout viscosités
- Modèle par minimisation résidu opérateur NS → intrinséquement stable

▷ Méthodes "contrôle optimal + réduction de modèle"

- Sans réactualisation de la base

- Avec réactualisation de la base

25% Réduction traînée 30%

600 Réduction mémoire CPU 1 600

100 Réduction temps CPU 4

NON Preuve convergence..... **OUI**

▷ Amélioration résultats

- Allée Von Karman inversée (queue de poisson)
- Relation analytique puissance contrôle

Conclusions

- ▷ **Amélioration du modèle réduit**
 - Pas modèle Galerkin classique
 - Prise en compte directe de la pression dans modèle
 - Respecte 3 lois physiques ...
 - ... même pour bases quelconques (pas divergence nulle)

- ▷ **Actualisation de la base réduite (*bifurcation, évolution contrôle ...*)**
 - Calcul rapide de la matrice de corrélations
 - Actualisation linéaire de la base POD
 - Enrichissement difficile (pb méthode numérique)