Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

Feuille 2. Idéaux

A partir de maintenant, sauf mention contraire, tous les anneaux sont supposés commutatifs (et unitaires).

EXERCICE 1. 1) Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$?

2) $2\mathbb{Z}$ est il un idéal de $\mathbb{Z}[i]$?

3) Soit A un anneau, et soit $P \in A[X]$. L'ensemble $P.A[X] = \{R(X) = P(X).Q(X), Q \in A[X]\}$ est-il un idéal de l'anneau $A[X]$?

EXERCICE 2. 1) Soit A un anneau. Montrer que l'ensemble $r(A)$ des éléments nilpotents de A est un idéal.

2) Donner un contre exemple si A n'est pas commutatif.

EXERCICE 3. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

i) Montrer que si J est un idéal de B, alors $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.

ii) Montrer que si J est un idéal premier, alors $f^{-1}(J)$ l'est aussi.

iii) Montrer que si f est surjectif et si I est un idéal de A, alors $f(I)$ est un idéal de B.

iv) Montrer que si de plus $\ker f \subset I$, alors $f(I)$ est premier.

EXERCICE 4. Soient K et L deux corps. Donner tous les idéaux de $K \times L$.

EXERCICE 5. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux de A. Montrer que si $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ soit un idéal.

EXERCICE 6. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux de A. Montrer que $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

EXERCICE 7. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de A.

i) Montrer que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;

ii) Montrer que si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A$, alors $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

EXERCICE 8. **Lemme Chinois:** Soit A un anneau et soient I et J deux idéaux étrangers (c'est-à-dire $I+J=A$). On considère l'application

$$f : A \to A/I \times A/J,$$

donnée par la formule $f(x) = (x+I, x+J)$.

i) Montrer que f est un homomorphisme surjectif.

ii) Montrer que f induit un isomorphisme $A/(I\cap J) \simeq A/I \times A/J$.

EXERCICE 9. Soit B un sous anneau de A et I un indéal de A.

1) Montrer que $B\cap I$ est u idéal de B, que $B+I := \{b+i, b\in B, i\in I\}$ est un anneau et que I en est un idéal.

2) Montrer que $B/(B\cap I) \simeq (B+I)/I$.