Université de Bordeaux 1. L3 Algèbre 4. Année 2012/2013

Feuille 7. Anneaux noethériens.

EXERCICE 1. Soit A un anneau noethérien.

i) Montrer que si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux surjectif, alors B est noethérien.

ii) Montrer que pour tout idéal $I \subset A$ l'anneau A/I est noethérien.

EXERCICE 2. Soient A et B deux anneaux tels que $A \subset B$. Soit $\alpha \in B$. On note $A[\alpha]$ l'intersection de tous les anneaux C tels que $A \subset C \subset B$ et $\alpha \in C$.

i) Montrer que $A[\alpha]$ est un anneau et que

$$A[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \mid a_i \in A\}.$$

ii) Montrer que si A est noethérien, alors $A[\alpha]$ l'est aussi.

EXERCICE 3. 1)Donner des exemples d'anneaux noethériens. L'anneau $\mathbb{Z}[X,Y,Z]/(XYZ - Y^3, 2+XYZ)$ est-il nothérien?

2) Montrer que l'anneau $A = \cup_{n=0}^{\infty} k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ n'est pas noethérien.

EXERCICE 4. Soient I, J idéaux de A tels que $I \subset J$.

i) Si J est de type fini, a-t-on I de type fini?

ii) Si I est de type fini, a-t-on J de type fini?

EXERCICE 5. Soit A un anneau noethérien et soit $f : A \to A$ un homomorphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme. (Indication: poser $I_n = \ker(f^n)$.)

EXERCICE 6. **théorème de Krull** Soit A un anneau.

i) Montrer que $r(A) \subset \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$.

ii) Soit $a \in A \setminus r(A)$. On note Σ_a l'ensemble des idéaux I de A tels que $\{a^n\}_{n \geq 1} \cap I = \emptyset$. Montrer qu'il existe un idéal J maximal au sens de l'inclusion dans Σ_a. (Dans le cas général, on peut utiliser le lemme de Zorn, pour obtenir l'existence de cet idéal maximal au sens de l'inclusion.).

iii) Montrer que

$$x \notin J \Leftrightarrow \exists n \geq 1, \exists j \in J, \exists b \in A \text{ tels que } j + bx = a^n.$$

En déduire que J est premier.

iii) Conclure que $r(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}\ premier} \mathfrak{p}$.

iv) Plus généralement, on définit le radical d'un idéal I par $\mathrm{rad}(I) = \{x \in A, \exists n \geq 1, x^n \in I\}$. Montrer que

$$\mathrm{rad}(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_I} \mathfrak{p}$$

où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I.

EXERCICE 7. Soit A un anneau. On suppose qu'il existe un idéal maximal $\mathscr{M}$ de A tel que tout idéal contenu dans $\mathscr{M}$ soit de type fini.

1) Montrer que si J est un idéal de A il existe un élément $x \in J$ tel que $J = Ax + J \cap \mathscr{M}$.

2) En déduire que A est noethérien.

EXERCICE 8. On suppose qu'il existe un idéal I de A, strict et non nul, tel que A/I soit noethérien et tel que tous les idéaux de A contenus dans I soient de type fini.

1) Soit J un idéal de A. Montrer qu'il existe un idéal L de A de type fini, contenu dans J tel que $J = L + J \cap I$.

2) En déduire que A est noethérien.

3) Application: Soient A et B deux anneaux noethériens. En considérant le morphisme $f : A \times B \to B$, $f(a,b) = b$ montrer que $A \times B$ est noethérien.