Prépa-agreg 2016-2017 Université de Bordeaux

Composition

19 septembre 2016

durée 2h

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha},\ n \geq 1.$$

Que peut-on dire de la convergence de la suite $(u_n)_n$ en fonction de α? Justifier.

Exercice 2. On considère la série

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

1) La série converge-t-elle absolument?

2) La série est-elle convergente? (On pourra faire un développement limité.)

Exercice 3. 1) Soit z un complexe tel que $Re(z) > 1$ et (a_n) une suite bornée. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$ converge.

2) On a vu en cours que si $Re(z) = 1, z = 1 + i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+i\theta}}$ diverge. Montrer cependant que, pour $\theta \neq 0$ et tout $N \geq 2$,

$$\left|\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}}\right| \leq \frac{2}{\theta} + (1 + |\theta|).$$

On pourra commencer par établir que, avec $\{t\} = t - [t]$ la partie décimale de t,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \int_1^N \frac{1}{t^{1+i\theta}} dt - \int_1^N \{t\} \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}} dt.$$

3) Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante vers 0. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{1+i\theta}}$ converge.

Exercice 4. A) (**suites sous additves**)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels tels que:

$$u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

1) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq a$. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_a}{a} + \frac{1}{n}\max\{u_0, u_1, \ldots, u_{a-1}\}.$$

(*Indication*: On poura faire une division euclidienne.)

2) En déduire que $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \inf_a \frac{u_a}{a}$ puis que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et appartient à $[-\infty, \infty[$.

3) On suppose maintenant seulement qu'il existe $M \geq 0$ tel que:

$$u_{m+n} \leq u_m + u_n + M, \text{ pour tout } m, n \geq 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et appartient à $[-\infty, \infty[$. (*Indication*: On poura considérer $v_n = u_n + M$.)

B) (**nombre de rotation**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\frac{f^{(n)}(x)}{n}$ converge et que la limite est indépendante de x, (ici $f^{(n)}$ désigne la composée n-ème de f).

1) Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = f^{(n)}(0)$. Soit $m, n \in N$ et soit k la partie entière de $f^{(n)}(0)$. Montrer que

$$f^{(m)}(0) + k \leq f^{(m+n)}(0) \leq f^{(m)}(0) + k + 1.$$

En déduire que

$$-1 \leq u_{n+m} - u_n - u_m \leq 1;$$

puis que la suite $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n}\right)_n$ converge.

2) Soit $x \geq 0$, conclure en remarquant que $0 \leq x \leq k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

C) (**Bonus: un peu de probas**) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geq a\right)$.

Montrer que $(u_n)_n$ est sur-multiplicative; i.e $u_{n+m} \geq u_n u_m$, pour tout $n, m \geq 1$.

En déduire que

$$I(a) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right)$$

existe et appartient à $[0, +\infty]$.