Composition 1 : Corrigé

Exercice 1 :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\text{terme général d'une série alternée donc convergente}} \underbrace{- \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{\text{Cette série est à termes négatifs à partir d'un certain rang.}}$$

Cette série converge donc si et seulement si $2\alpha > 1$.

Au final la série converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
(Elle converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.)

Exercice 2 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}.$$

On considère une tranche : $\displaystyle\sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}.$

On a $\lfloor \log n \rfloor = k$

$$\iff k \leq \log n < k+1$$

$$\iff k \ln 10 \leq \ln n < (k+1) \ln 10$$

$$\iff 10^k \leq n < 10^{k+1}.$$

donc : $(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}$ a un signe constant

pour $10^k \leq n < 10^{k+1}$.

d'où $\left| \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n} \right|$

$$= \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{1}{n} \geqslant \underbrace{\left(10^{k+1} - 10^k\right)}_{\text{nb de termes}} \times \underbrace{\frac{1}{10^{k+1}}}_{\text{plus petit terme}}$$

$$= \frac{9}{10}.$$

Cette série ~~ne~~ vérifie donc pas le critère de Cauchy donc diverge.

Exercice 3 :

La fonction $x \to |\sin(x)| + |\sin(x+1)|$ est continue 2π-périodique, ne s'annule pas.

Une fonction continue sur un intervalle fermé (compact) atteint son minimum, donc il existe un réel $c>0$ tel que pour tout x, $|\sin x| + |\sin(x+1)| \geq c$.

· On a :

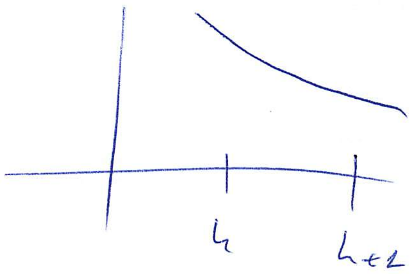
$$\frac{|\sin 2n|}{2n} + \frac{|\sin(2n+1)|}{2n+1} \geq \frac{|\sin 2n| + \sin(2n+1)}{2n+1} \geq \frac{c}{2n+1}$$

On a donc : $$\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n} \geq \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{c}{2n+1}}_{\text{série divergente}}$$

La série n'est donc pas absolument convergente.

(On a vu qu'elle est convergente par Abel).

Exercice 4 : Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, décroissante positive.



on a $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le f(k)$.

d'où en sommant : $\sum_{k\ge n+1} f(k) \le \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k\ge n} f(k)$ $(<+\infty)$

i.e. $\sum_{k\ge n+1} f(k) \le \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{k\ge n+1} f(k) + f(n)$

et $1 \le \dfrac{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt}{\sum_{k\ge n+1} f(t)} \le 1 + \dfrac{f(n)}{\sum_{k\ge n+1} f(k)}$

Montrons que : $\dfrac{f(n)}{\sum_{k\ge n+1} f(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a : $0 \le \dfrac{f(n)}{\sum_{k\ge n+1} f(k)} \le \dfrac{f(n)}{\sum_{k\ge n} f(k) - f(n)}$

$\le \dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n)}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt}{f(n)} - 1}$

$+\infty \longleftarrow$ par hypothèse

On a $\dfrac{f(n)}{\sum_{k\geq n+1} f(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $\sum_{k\geq n+1} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

(2) Pour $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$.

on a donc :

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$$= \cancel{\left[\frac{-1}{\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right]_n^{+\infty}}$$

$$= \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_n^{+\infty} = +\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Rq : $\dfrac{1}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

donc $\sum_{k\geq n} \dfrac{1}{k^\alpha} \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.