Prepa agreg 2014-2015 Université de Bordeaux

Composition 3 : Corrigé

Exercice 1: $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-y>0\}$
$V = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ v^2-4u>0\}$.

2) • Soit $(x,y)\in U$,

$$\varphi(x,y) = (xy, x+y) \in V \text{ car } (x+y)^2-4xy=(x-y)^2.$$

donc $\varphi(U)\subset V$.

• Soit $(u,v)\in V$ et $(x,y)\in U$.

$$(u,v)=\varphi(x,y) \iff \begin{cases} u = xy \\ v = x+y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - xv + u = 0 \\ y = v - x \end{cases} \quad (S)$$

Etant donné $(u,v)\in V$, le système (S) a deux solutions dans $\mathbb{R}^2$ mais une seule dans U.

On a supposé $(u,v)\in V$ et $(x,y)\in U$, on obtient donc.

$$(u,v)=\varphi(x,y) \iff \begin{cases} x = (v + \sqrt{v^2-4u})/2 \\ y = (v - \sqrt{v^2-4u})/2 \end{cases}$$

On pose $\psi(u,v) = \left(\dfrac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}, \dfrac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}\right)$

φ réalise une bijection de U sur V d'inverse ψ.
φ et ψ sont $\mathcal{C}^\infty$. Donc φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V.

3) Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$

on a $f = f\circ\psi\circ\varphi = F\circ\varphi$ avec $F = f\circ\psi$, $F : V\to\mathbb{R}^2$.

f solution de l'EDP

$$\iff \forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0$$

②

On: $f(x,y) = F(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = F(xy, x+y)$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \partial_1 F(\varphi(x,y))\, \partial_x \varphi_1(x,y) + \partial_2 F(\varphi(x,y))\, \partial_x \varphi_2(x,y)$

$= (\partial_1 F)(\varphi(x,y))\ y \quad + \partial_2 F(\varphi(x,y)) \times 1.$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\partial_1 F)(\varphi(x,y))\, x \quad + \partial_2 F(\varphi(x,y)) \times 1$

Donc: f solution de l'EDP

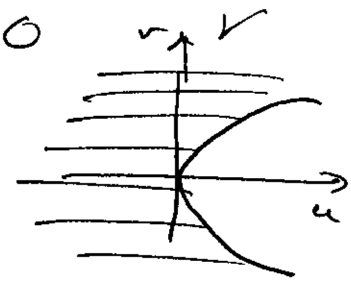
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in U,\ (y-x)(\partial_1 F)(\varphi(x,y)) + 3(x-y)\, F(\varphi(x,y)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in U,\quad (\partial_1 F)(\varphi(x,y)) + 3\, F(\varphi(x,y)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in V,\quad (\partial_1 F)(u,v) + 3F(u,v) = 0$

$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in V,\quad F(u,v) = h(v)\, e^{3u},\ h\ \mathcal{C}^1$

$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = h(x+y)\, e^{3xy} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Exercice 2:

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad U = GL(n, \mathbb{R}) \qquad ,\ X \in U,\ f(X) = X^{-1}.$

1) Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$,

on pose $\|M\| = \sup_{\substack{|x|=1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} |Mx|$.

c'est une norme multiplicative. (le prouver).

(Bon exercice: calculer $\|M\|_{\infty,\infty}$, $\|M\|_{1,1}$ et $\|M\|_{2,2}$ lorsque $|\cdot| = \|\cdot\|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sur $\mathbb{R}^n$)

2) Soit $\|K\| < 1$, $\quad \sum_{k \geq 0} \|K^k\| \leq \sum_{k \geq 0} \|K\|^k < +\infty$

Cette série converge normalement, E est complet,

donc $\sum_{k \geq 0} K^k$ converge.

On a $(Id-K)(Id+K+\dots+K^n)$
$$= (Id+K+\dots+K^n)(Id-K) = Id - K^{n+1}$$

$$\|K^{n+1}\| \leq \|K\|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par continuité de la multiplication dans E, $n\to+\infty$ donne
$$(Id-K)\left(\sum_{n\geq 0} K^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} K^n\right)(Id-K) = Id.$$

Donc $(Id-K)$ est inversible d'inverse $\sum_{n\geq 0} K^n$.

3) $U = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, $\det : E \to \mathbb{R}$ est continue (car polynomiale en les coefficients de la matrice) donc U est ouvert.

<u>ou</u> : Soit $X\in U$, si $H\in E$, $\|H\| < \dfrac{1}{\|X^{-1}\|}$

Alors $(X+H) = X\underbrace{(Id + X^{-1}H)}_{\text{inversible car } \|-X^{-1}H\|<1}$

est inversible (d'inverse $(Id+X^{-1}H)^{-1}X^{-1}$).

4) Soit $\|H\|<1$,

on a $f(I+H) - f(Id)$
$$= (Id+H)^{-1} - Id$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-H)^n - Id$$
$$= -H + \sum_{n\geq 2}(-H)^n.$$

Or $\left\|\sum_{n\geq 2}(-H)^n\right\| \leq \|H\|^2 \sum_{n\geq 0}\|H\|^n = \dfrac{\|H\|^2}{1-\|H\|}$

est bien un $o(\|H\|)$

donc f est différentiable en l'identité

et $Df_{Id}(H) = -H$, $H\in E$

5) Soit $X \in U$ et $H \in E$ tq : $\|H\| < \frac{1}{\|X^{-1}\|}$.

$$f(X+H) - f(X) = (X+H)^{-1} - X^{-1}$$
$$= [X(Id + X^{-1}H)]^{-1} - X^{-1}$$
$$= (Id + X^{-1}H)^{-1} X^{-1} - X^{-1}$$
$$= \sum_{k \geq 0} (-X^{-1}H)^k X^{-1} - X^{-1}$$
$$= -X^{-1}HX^{-1} + \sum_{k \geq 2} (-X^{-1}H)^k X^{-1}$$

$$\left\| \sum_{k \geq 2} -(X^{-1}H)^k X^{-1} \right\| \leq \|X^{-1}\|^3 \|H\|^2 \sum_{k \geq 0} \|X^{-1}\| \, \|H\|$$

C'est donc bien un $o(\|H\|)$.

Donc f est differentiable en X et $Df_X(H) = -X^{-1}HX^{-1}$, $H \in E$.

6) Soit $K \in E$, $\|K\| < \frac{1}{\|X^{-1}\|}$.

$$Df_{X+K}(H) = -(X+K)^{-1} H (X+K)^{-1}$$
$$= -\left[(-X^{-1}KX^{-1}) + o(\|K\|)\right] H \left[-X^{-1}KX^{-1} + o(\|K\|)\right]$$
$$= X^{-1}KX^{-1}HX^{-1} + X^{-1}HX^{-1}KX^{-1} + o(\|K\|)$$

donc f est 2 fois differentiable en X

et $D^2f_X(H,K) = X^{-1}KX^{-1}HX^{-1} + X^{-1}HX^{-1}KX^{-1}$
$H, K \in E$.

7) La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit :

$$f(X+H) = f(X) + Df(X)H + \frac{1}{2!} D^2f_X(H,H) + o(\|H\|^2)$$

i.e. $(X+H)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + X^{-1}HX^{-1}HX^{-1} + o(\|H\|^2)$.

D'après le théorème d'inversion locale, (6)
il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x
et V ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y
tels que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.
En particulier $V \subset f(\mathbb{R}^n)$.
donc $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.

(4) $f(\mathbb{R}^n)$ est non vide, ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$ est connexe.
donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
f est surjective et injective, donc bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de chaque point par le théorème d'inversion locale. f est donc bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

(B) (1) Soit g convexe et différentiable, on a :

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y), \quad t \in [0,1]$$

i.e. : $$g(x + t(y-x)) \leq g(x) + t(g(y) - g(x))$$

En dérivant en $t=0$, on a : (Rq : on a égalité en $t=0$)

$$\underbrace{Dg_x(y-x)}_{\langle \nabla g(x),\, y-x \rangle} \leq g(y) - g(x)$$

donc $$g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y-x \rangle$$

(2) Réciproquement, si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y-x \rangle$$

Exercice 3 :

(A) (1) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(y)$
on a alors $\|x-y\| \leq \frac{1}{C} \|f(x) - f(y)\| = 0$ donc $x = y$
et f est injective.

- Montrons que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
Soit $(y_n)_n$ une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$ telle que $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$
Montrons que $y \in f(\mathbb{R}^n)$.
$y_n \in f(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_n) = y_n$.
On a : $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{C} \|y_p - y_q\|$, $p, q \geq 1$.
$(y_n)_n$ est convergente donc est une suite de Cauchy
donc $(x_n)_n$ aussi et x_n converge vers $x \in \mathbb{R}^n$.
f est continue donc $y_n = f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$
Par unicité de la limite, $y = f(x)$ et $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$.
on a $\|f(x+tv) - f(x)\| \geq C \|tv\|$
donc $\left\| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right\| \geq C \|v\|$.

f est différentiable, donc en faisant $t \to 0$, on obtient,
$$\| Df_x(v) \| \geq C \|v\|.$$

(3) $\rightarrow$ Soit $y \in f(\mathbb{R}^n)$, il existe x tel que $f(x) = y$
$Df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et donc clairement injective.
On est en dimension finie donc Df_x est inversible.
De plus f est $\mathcal{C}^1$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$ ⑦

on pose $z = (1-\lambda)x + \lambda y$

on a : $g(x) \geq g(z) + \langle \nabla g(z), x - z \rangle$ (L1)

$g(y) \geq g(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle$ (L2)

$(1-\lambda)$ (L1) $+ \lambda$ (L2) donne :

$(1-\lambda) g(x) + \lambda g(y) \geq g((1-\lambda)x + \lambda y)$.

i.e. g convexe.

② Soit g convexe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

$f(x) = x + \nabla g(x)$ ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$)

On a :

$\langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y \rangle$

$= \langle \nabla g(x), x - y \rangle + \langle \nabla g(y), y - x \rangle \leq g(x) - g(y) + g(y) - g(x) = 0$

donc $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2$

③ Par Cauchy-Schwarz,

$\|x-y\|^2 \leq \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \leq \|f(x) - f(y)\| \, \|x - y\|$

donc pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$

f vérifie les hypothèses de Ⓐ, donc réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.