Corrigé Composition 7 (2015)

Ex 1 : (Darboux).

Soient $a < b$, $f'(a) < k < f'(b)$.

et $g(x) = f(x) - kx$

1) g est dérivable donc continue donc atteint son minimum sur le segment $[a,b]$.

. Le minimum n'est pas atteint en a car sinon :

$x \in]a,b]$, $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0$

et alors $x \geq a$ donc $g'(a) \geq 0$.

Or $g'(a) = f'(a) - k < 0$.

. De même le minimum n'est pas atteint en b, car sinon :

$x \in [a,b[$, $\dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} \leq 0$

et $x \leq b$ donc : $g'(b) \leq 0$,

Or $g'(b) = f'(b) - k > 0$.

2) Le minimum de g est donc atteint en (au moins) un point $c \in]a,b[$, donc $g'(c) = 0$

c'est-à-dire $k = f'(c)$.

Ex 2 : (E) : $x''(t) + q(t)\,x(t) = 0$.

. C'est une ~~équation~~ équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

1) Si x_1, x_2 sont solutions, on vérifie que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ est aussi solution.

L'ensemble des solutions est donc un sous espace vectoriel de celui des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple).

D'après Cauchy-Lipschitz, les solutions sont déterminées par la valeur de $(x(0)$ et $x'(0))$.

Toute les solution s'écrivent donc : $\lambda x_1 + \mu x_2$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et x_1, x_2 les solutions de (E) vérifiant
les conditions $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_1'(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_2(0) = 0 \\ x_2'(0) = 1 \end{cases}$.

2) Si f et g sont 2 solution de E,
alors f et g sont C^2

donc $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $W'(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t)$
$= -f(t)(q(t)g(t)) + (q(t)f(t))g(t)$
$= 0$

donc W est constant sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $\alpha < \beta$ 2 zéros consécutifs de f.

On suppose par exemple que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$
$f(t) > 0$ si $t \in]\alpha, \beta[$.

On a alors $f'(\alpha) \geq 0$

et même $f'(\alpha) > 0$
(sinon $f \equiv 0$)

et $f'(\beta) < 0$.

On a : $W(\alpha) = -f'(\alpha)\, g(\alpha)$ car $f(\alpha) = 0$

et $W(\beta) = -f'(\beta)\, g(\beta)$ car $f(\beta) = 0$

donc $g(\beta) = \underbrace{\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}}_{<0} g(\alpha)$.

donc $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont de signes opposés.

Rq: $g(\alpha) \neq 0$ car sinon, ~~par~~ vu de l'ensemble des solutions f et g seraient proportionnelles.

Donc : $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$.

Par le théorème de Rolle, g étant continue,

$\exists\, \gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $g(\gamma) = 0$.

Rq : (γ est unique, car sinon entre 2 zéros de g, il y aurait un zéro de f.)

Ex 3 : (E) $x'(t) = \sin(x(t))$. (4)

1) (E) s'écrit $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = \sin x$.
C'est une équation autonome et f est (globalement) Lipschitzienne.
Donc d'après Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
admet une unique solution maximale.

f étant bornée (ou f étant globalement Lipschitzienne) on déduit que les solutions maximales sont globales.
(En effet : Si la solution $x(t)$ est définie sur $]a, b[$. $a, b \in \mathbb{R}$.
. Si $b < +\infty$. f étant bornée, $|x'(t)| \leq M$
donc d'après le théorème des accroissements finis.
$|x(t) - x(t_0)| \leq M\,|\cancel{b} - \cancel{t_0}| < +\infty$.
Donc d'après le théorème des bouts, x peut se prolonger après b.
. De même si $a > -\infty$.)

2) $x \equiv 0$ et $x \equiv \pi$ sont des solutions de (E).
D'après Cauchy-Lipschitz, les solutions ne se croisent pas.
donc si $\varphi(0) \in (0, \pi)$ et si φ est solution de (E)
on a : $\varphi(t) \in (0, \pi)$ pour tout t (car φ est continue).

3) On a $0 < \varphi(t) < \pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
donc $\varphi'(t) = \sin(\varphi(t)) > 0$.
donc φ est croissante, bornée donc converge vers l.
$\varphi'(t) = \sin(\varphi(t))$ donc $\varphi'(t)$ converge vers $l' = \sin(l)$.
car sinus est continue.

• Si $\ell' \neq 0$, on ne pourrait avoir φ bornée

donc $\ell' = 0$

Or $0 < \varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \pi$

donc $0 < \ell \leq \pi$.

et $\ell' = \sin \ell = 0$

donc $\ell = \pi$

c'est-à-dire $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$.

(De même, on pourrait montrer que $\varphi(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$).