



DISVE
Pôle Licence

ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013

DS de printemps

PARCOURS : MISMI DOM PHY. ING. CODE UE : Q1MI2M21

Epreuve : DS Mathématiques

Date : 26/04/2013

Heure : 11h00

Durée : 1h30

Documents : Non autorisés. La calculatrice homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.

Responsable de l'épreuve : M. Bonnefont



Exercice 1.

1. Soit g une fonction. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 (c'est-à-dire avec un reste d'ordre 3) au point a pour la fonction g . Préciser bien les hypothèses.
2. Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$f(x) = e^{-2x}.$$

3. Soit $x \geq 0$, montrer l'inégalité

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \leq f(x) \leq 1 - 2x + 2x^2.$$

4. A partir de ce qui précède, trouver a le plus grand possible tel que l'inégalité

$$\left| f(x) - (1 - 2x + 2x^2) \right| \leq 10^{-6}$$

soit satisfaite pour tout $x \in [0, a]$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{x^2 + x + 1}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Calculer le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au point 0.
3. Donner l'équation de la tangente ainsi que la position de la courbe représentative de f au voisinage du point 0. Représenter sommairement la courbe de f au voisinage du point 0.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{(2+2x-x^2)}.$$

Le but de l'exercice est de calculer le développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ au point $x = 0$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Calculer la dérivée de f et montrer que f vérifie l'équation différentielle :

$$y'(x) = 2(1-x)y(x).$$

Turner S.V.P.

- Justifier que f admet un développement limité en 0 à tout ordre.
- On écrit le développement limité en 0 à l'ordre 4 sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4).$$

Quelle est la valeur de a_0 ?

- Justifier que f' admet un développement limité à l'ordre 3 au point 0. Ecrire ce développement à l'aide de celui de f , c'est-à-dire à l'aide des réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 .
- A l'aide de l'équation différentielle, calculer le développement limité de f au point 0 à l'ordre 4.

Exercice 4.

- Donner le développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2.
- Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cosh x}{x^4}.$$

Fin