Année universitaire 2018/2019
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 1
Analyse : convergence et dualité

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Devoir surveillé. Durée 2h.

Les exercices sont indépendants.

On utilisera les notations suivantes : $\tau_\lambda f(t) = f(t-\lambda)$ et $\delta_\alpha f(t) = f(\alpha t)$. Enfin $f * g$ désigne le produit de convolution de f et de g

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons que la transformée de Fourier est définie pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

où $\langle x,\xi\rangle$ désigne le produit scalaire usuel.

Exercice 1. Soient p, q tels que $1 \leq p < q < +\infty$.

(1) Comparez les espaces $L^p([0,1])$ et $L^q([0,1])$. (On déterminera si les inclusions sont strictes).

(2) Même question pour ℓ^p et ℓ^q.

(3) L'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est l'espace des (classes de) fonctions f telles que, pour tout $R > 0$, $\mathbf{1}_{[-R,R]}f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrez que, pour tout $p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(4) Déterminez $\|\delta_\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ en fonction de $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Exercice 2. Soient p, q tels que $1 \leq p, q < +\infty$.

Soit T un opérateur linéaire *non nul* borné de $L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $a > 0$ $T(\delta_a f) = a^\alpha \delta_{1/a} T(f)$.

(1) En vous inspirant de ce qui a été fait pour la convolution, quelle relation existe-t-il entre p, q et α ?

(2) Soit $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ (la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1,1]$).

Pour quels $p \geq 1$ a-t-on $f \in L^p(\mathbb{R})$? Calculez $\hat{f}$. Pour quels $q \geq 1$ a-t-on $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$?

(3) Soit $a > 0$, en déduire la transformée de Fourier de $f_a = \mathbf{1}_{[-a,a]}$.

Dans la suite, il sera pratique d'utiliser la notation standard $\mathbf{sinc}\, x = \dfrac{\sin x}{x}$ (sinus cardinal) et de remarquer que $|\mathbf{sinc}\, x| \leq \min(1, 1/|x|)$.

(4) On note maintenant $g = f * f$ où $*$ désigne le produit de convolution.

Pour quels $p \geq 1$ a-t-on $g \in L^p(\mathbb{R})$?

Déterminez $\hat{g}$. Pour quels $q \geq 1$ a-t-on $\hat{g} \in L^q(\mathbb{R})$?

(5) On suppose que p et q sont tels qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{0.1}$$

(a) En considérant $\varphi = \delta_a g$, montrez que nécessairement $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(b) Montrez que si on a (0.1) alors la transformée de Fourier se prolonge en un opérateur linéaire continu $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3. Fonction Maximale de Hardy-Littlewood
La fonction maximale de Hardy-Littlewood est définie pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ par

$$M[f](x) = \sup_{R>0} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} |f(x+y)| \, \mathrm{d}y = \sup_{R>0} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} |f(t)| \, \mathrm{d}t = \sup_{R>0} \frac{1}{2R} f * \mathbf{1}_{[-R,R]}(x).$$

(1) Montrez que $\|M[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

(2) Déterminez $M[\tau_\lambda f]$ et $M[\delta_\alpha f]$ en fonction de $M[f]$.

Soient p, q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$. En vous inspirant de ce qui a été fait pour la convolution (et dans l'exercice 2), déterminez q en fonction de p pour qu'il puisse exister une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|M[f]\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{0.2}$$

(3) Montrez que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support $[-1, 1]$ alors

$$Mf(x) \geq \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2(1+|x|)}.$$

(On pourra distinguer les cas $|x| \geq 1$ et $|x| \leq 1$).

En déduire que (0.2) n'est pas valide si $p = q = 1$.

(4) Soit $K(x) = \frac{1}{2}(1+|x|)^{-2}$ et, pour $\varepsilon > 0$, soit $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

(a) Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrez que $K_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R})$. Que pouvez vous dire sur $K_\varepsilon * f$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

(b) On considère maintenant la *fonction maximale*

$$\mathcal{M}[f](x) = \sup_{\varepsilon>0} K_\varepsilon * |f| \quad , \qquad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Montrez qu'il existe une constante $C > 0$ (qu'on déterminera) telle que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M}[f](x) \leq C M[f](x).$$

Indications :

Montrez qu'en remplaçant f par $\tau_x f$ il suffit de montrer que $\mathcal{M}[f](0) \leq C M[f](0)$.

On introduit ensuite $g(t) = |f(t)| + |f(-t)|$ et $G(x) = \int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t$. Comparer G à $M[f]$ puis conclure avec une intégration par parties.