Feuille de TD 3

Exercice 1

- On pose $\mu_0 = 1,76$.
- On fait l'hypothèse que les variables aléatoires observées sont indépendantes ~~et~~ de loi $\mathcal{N}(\mu, (\frac{1}{8})^2)$ avec μ inconnue.

1) D'après l'énoncé, on cherche à tester l'hypothèse nulle $H_0 = \{\mu = \mu_0\}$ contre l'hypothèse alternative $H_1 = \{\mu > \mu_0\}$.

2) On pose $Y_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{\mu}_n - \mu_0)$ $\quad (\sigma = \frac{1}{8})$

avec $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

D'après le rappel, on a que Y_n est de loi normale.

Sa moyenne est $E[Y_n] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - \mu_0)$

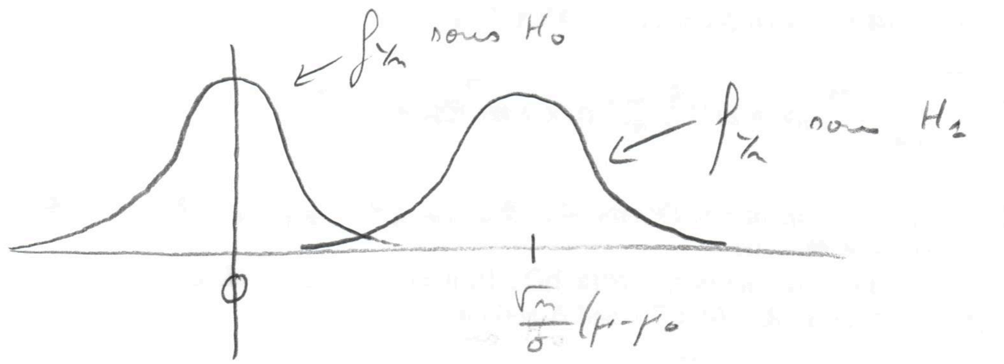
$$Var(Y_n) = 1$$

car $E[\hat{\mu}_n] = \mu$

$Var[\hat{\mu}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$.

Donc sous H_0, Y_n est exactement de loi $\mathcal{N}(0,1)$

Tandis que sous H_1, Y_n suit la loi $\mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu-\mu_0), 1\right)$



3) On choisit donc de ne pas rejeter H_0 si $Y_n \leq k$
de rejeter H_0 si $Y_n > k$.

On fixe k de telle sorte que l'erreur de première espèce soit $\leq$ à 0,05

$$\mathbb{P}(H_0 \text{ déclaré faux} \mid H_0 \text{ est vraie}) = \mathbb{P}_{\mu_0}(Y_n > k)$$
$$= \mathbb{P}(Z > k)$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On prend donc $k = q_{0,95} \simeq 1,65$ le quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

4). Si $n = 30$, $Y_n = 8 \times \sqrt{30}\,(1,78 - 1,76)$
$= 8 \times \sqrt{30} \times 0,02 \simeq 0,88$

on ne rejette donc pas H_0.

. Si $n = 100$, $Y_n = 8 \times \sqrt{100} \times 0,02 = 1,6$, on ne rejette pas H_0.

. Si $n = 150$, $Y_n = 8 \times \sqrt{150} \times 0,02 \simeq 1,96$, on rejette alors H_0.