CPP - la prépa des INP (2 ème année). Bordeaux, 2014.

Feuille de TD 3 : Tests statistiques

Exercice 1. La taille moyenne des hommes aux Pays-Bas est de 1,76 mètres.

Sur un échantillon , on trouve $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1,78$ mètres. On veut savoir si sur cet échantillon la taille est "significativement " plus grande que la moyenne. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ici on suppose que σ est connu et que $\sigma = \frac{1}{8}$.

1. Pour répondre à la question, quelles sont les hypothèses à tester.
2. On pose $Y_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{\mu}_n - \mu_0)$. Donner la loi de Y_n sous H_0 et sous H_1.
3. Construire le test statistique permettant de répondre à la question posée.
4. On suppose que $n = 30$, que peut-on conclure? Même question pour $n = 100$ et $n = 150$.

Rappel: On rappelle que si X et Y sont indépendantes et de loi normale et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αX et $X + Y$ sont aussi de loi normale. On rappelle également que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(Z \geq 1,65) \simeq 0,05$.

Exercice 2. Test de Student

On considère n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont tous les 2 inconnus.

On souhaite tester l'hypothèse nulle:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contre les hypothèses alternatives:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

et

$$H_1' : \mu > \mu_0.$$

On pose

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2.$$

On admettra ici que

- $A = \sqrt{n}\frac{(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- $B = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$ suit une loi du chi-deux à $n-1$ degrés de libertés.
- A et B sont indépendantes. La variable aléatoire $Z = \sqrt{n-1}\frac{A}{B}$ a donc une loi bien définie que l'on appelle loi de Student de paramètre $(n-1)$.
- Quand $n \to +\infty$, la loi de Student $(n-1)$ converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma^2}$ sont des estimateurs sans biais de μ et σ^2.
2. Exprimer Z en fonction de $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma^2}$.
3. Donner le comportement de Z quand $n \to +\infty$ sous les hypothèses H_0 et H_1.
4. Construire les tests statistiques demandés.
5. **Application** Pour étudier l'effet du Sérum d'albumine soée à 2 pour cent (S.A.) sur la respiration des cellules isolées de l'épithélium du rat, on a fait 11 expériences indépendantes. Cette respiration est mesurée en microlitre d'oxygène par milligramme de protéine. Pour la i-ème expérience, on a un résultat de mesure sans S.A. (mesure témoin) noté t_i et un résultat de mesure avec S.A. noté s_i.

t_i	s_i	$e_i = s_i - t_i$
3.3	5.07	1.77
3.37	5.06	1.69
3.17	5.09	1.92
5.29	7.18	1.79
5.89	7.37	1.48
2.52	3.56	1.04
2.37	3.42	1.05
4.62	7.3	2.68
4.31	6.5	2.19
3.85	5.24	1.39
3.55	5.46	1.91

Pour les e_i, on trouve $\hat{e}_{11} \simeq 1,72$ et $\hat{\sigma^2} \simeq 0,23$. On donne le quantile d'ordre 0,95 pour la loi de Student (10): 1,812.

Peut-on conclure que le $S.A$ a une influence positive sur la respiration?