Master MIMSE
Université de Bordeaux
2013/2014

Chaînes de Markov
Michel Bonnefont

FICHE D'EXERCICES N°1

Exercice 1. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que P et Q sont des matrices stochastiques et représenter leur graphe associé.

Exercice 2. Soit P la matrice définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} P_{5n,5n+1} = P_{5n+1,5n+2} = P_{5n+2,5n+3} = P_{5n+3,5n+4} = 1 \\ P_{5n+4,5n+5} = P_{5n+4,5n} = 1/2 \end{cases}$$

Montrer que P est une matrice stochastique et donner son graphe associé.

Exercice 3. Soit X_n le minimum obtenu en jetant n fois un dé équilibré à six faces. Montrer que la suite (X_n) est une chaîne de Markov homogène et donner son espace d'états, sa matrice de transition et le graphe correspondant.

Exercice 4. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur $E = \{a,b,c\}$ de loi initiale la mesure uniforme sur E et de matrice de transition P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la loi de la chaîne au temps n.

Exercice 5. Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Poser
$$P^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$
et calculer directement P^n (en faisant apparaître des suites arithmético-géométriques.)
2. En déduire que P^n converge vers une matrice que l'on appelera P_∞.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q_\infty = P_\infty^t$.
4. Que vaut
$$(1/3 \quad 2/3) \quad P?$$
5. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q = P^t$.
6. On considère (X_n) la chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale $\mu_0 = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Calculer la loi de la chaîne au temps n.

Exercice 6. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^n (ou plutôt Q^n avec $Q = P^t$) en diagonalisant la matrice Q.