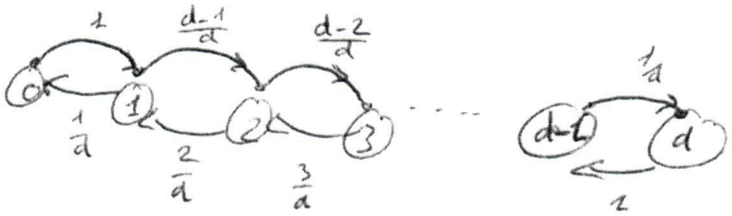
Ex 3 :

1) Le nombre de balles dans l'urne A au temps $n+1$ ne dépend que du nombre de balles dans l'urne A au temps n et d'une procédure aléatoire indépendante. De plus cette procédure est indépendante de l'instant n. Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov homogène.

Si on a k boules dans l'urne A au temps n, alors on aura $k+1$ ou $k-1$ au temps $n+1$ et ~~la~~ matrice de transition vaut

$$\begin{cases} P(k,k+1) = \dfrac{d-k}{d} & \text{(on choisit une boule de B)} \\ P(k,k-1) = \dfrac{k}{d} & \text{(on choisit une boule de A).} \\ P(k,j) = 0 & \text{si } j \neq k-1, k+1 \end{cases}$$

Le graphe associé est :



2) Si $X_0 = 0$, alors nécessairement $X_1 = 1$. $(\mathbb{P}_0(X_1=1) = 1)$.

Nécessairement X_2 vaut 0 ou 2.

et $\mathbb{P}_0(X_2 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}_0(X_1 = 1)$
$= P(1, 0) = \dfrac{1}{d}$

$\mathbb{P}_0(X_2 = 2) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1)\, P(1,2) = P(1,2) = \dfrac{d-1}{d}$.

Nécessairement X_3 vaut 1 ou 3.

et $\mathbb{P}_0(X_3 = 1) = \mathbb{P}_0(X_2 = 0)\, P(0,1) + \mathbb{P}_0(X_2 = 2)\, P(2,1)$

$= \dfrac{1}{d} + \left(\dfrac{d-1}{d}\right) \times \dfrac{2}{d}.$

$\mathbb{P}_0(X_3 = 3) = \mathbb{P}_0(X_2 = 2)\, P(2,3)$

$= \dfrac{d-1}{d} \times \dfrac{d-2}{d}.$

(On vérifie bien que $\mathbb{P}_0(X_3 = 1) + \mathbb{P}_0(X_3 = 3) = 1$).

3) On a $0 \to 1 \to 2 \to \dots \to d \to d-1 \to \dots \to 0$.
donc la chaîne est irréductible.
L'espace d'états est fini donc elle est récurrente (positive).
La chaîne est de période 2, car $0 \to 1 \to 0$
et tous les chemins allant de 0 à 0 sont de longueur paire.

4) La chaîne est irréductible et récurrente positive
donc admet une unique probabilité invariante.

5) On vérifie que : pour $0 \leq k \leq d-1$

$\mu(k)\, P(k, k+1) = \dfrac{d!}{k!\,(d-k)!} \left(\dfrac{1}{2}\right)^d \dfrac{d-k}{d}$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^d \dfrac{(d-1)!}{k!\,(d-k-1)!}$

$\mu(k+1)\, P(k+1, k) = \dfrac{d!}{(k+1)!\,(d-k-1)!} \left(\dfrac{1}{2}\right)^d \dfrac{k+1}{d} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^d \dfrac{(d-1)!}{k!\,(d-k-1)!}$

donc $\mu(k)P(k,k+1) = \mu(k+1)\,P(k+1,k)$ (7)

On a donc bien $\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x)$ pour tout $x,y \in \{0,\dots,d\}$.

μ est donc une mesure de probabilité reversible pour la chaîne.

C'est donc une probabilité invariante.

En effet,
$$\mu P(x) = \sum_{y\in E} \mu(y)P(y,x)$$
$$= \sum_{y\in E} \mu(x)P(x,y)$$
$$= \mu(x) \sum_{y\in E} P(x,y) = \mu(x).$$

6) La chaîne est irréductible, récurrente positive

donc $\mu(k) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_k[T_k]}$

et $\mathbb{E}_0[T_0] = \dfrac{1}{\mu(0)} = 2^d$, $\mathbb{E}_m[T_m] = \dfrac{2^d}{\binom{2m}{m}}$ $\left(\underset{d\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi m} \text{ par Stirling} \right)$.

7) La chaîne est irréductible et récurrente positive, par le théorème ergodique, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow{ps} \sum_{i=0}^{d} \pi(i)f(i) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^d 2^i$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^d (2+1)^d = \left(\frac{3}{2}\right)^d.$$

8) La chaîne n'est pas apériodique, donc on ne peut rien dire pour la convergence en loi.

9) La matrice de transition est alors modifiée en :

$$\begin{cases} P(k,k) = \frac{1}{2} \\ P(k,k+1) = \frac{d-k}{2d} \\ P(k,k-1) = \frac{k}{2d} \end{cases}$$