université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales et L3 Ingénierie Mathématique **CODE UE** : M1MA6M11 **Epreuve : Probabilités** **Date : 07/05/2015** **Heure : 14h-17h** **Durée : 3h** *Responsable de l'épreuve*: M. Bonnefont *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département DL Licence

Exercice 1. Absence de mémoire et minimum de 2 lois exponentielles indépendantes
On rappelle qu'une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$ et admet pour densité

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geq 0} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X > t)$ pour $t \geq 0$.

2) Montrer que X satisfait à la propriété d'absence de mémoire, c'est-à-dire, que pour tous $t, s \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{1}$$

Justifier le terme: absence de mémoire.

3) Réciproquement, soit Y une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $[0, +\infty)$ et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire (1). On note f_Y la densité de Y. On suppose de plus que cette densité (ou plutôt qu'une représentation de cette densité) est continue à droite en 0 et qu'elle vérifie $f_Y(0) > 0$. On pose $\lambda = f_Y(0)$. A partir de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la densité f_Y vérifie

$$f_Y(t+s) = f(t)\left(1 - \int_0^s f_Y(u)du\right), \quad t, s \geq 0.$$

En déduire que la densité f_Y vérifie l'équation différentielle suivante (*on ne vérifiera que l'existence de la dérivée à droite*): pour tout $t \geq 0$,

$$f'_Y(t) = -\lambda f_Y(t).$$

4) Résoudre l'équation différentielle puis conclure que Y suit bien une loi exponentielle.

5) Soient deux variables aléatoires U et V indépendantes et vérifiant la propriété d'absence de mémoire (1). On pose $T = \min(U, V)$. Montrer que T vérifie aussi la propriété d'absence de mémoire (1).

6) Soient maintenant deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$. Dans cette question, montrer directement par le calcul que Z suit bien une loi exponentielle et donner son paramètre.

Exercice 2. Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résutlat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenus au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1) Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2$. Que vaut $\mathbb{P}(X = j | D = i)$?

2) Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

3) Montrer que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right).$$

4) Sachant que l'on n'a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle est la probabilité que le résultat du dé était 1? Calculer cette quantité quand $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. On tire n fois de suite et de manière indépendante un réel suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On note X_i le résultat du i ème tirage, S_n la somme des n tirages et $M_n = \frac{1}{n}S_n$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_1

2) A partir de combien de tirages, peut-on dire que la probabilité que M_n soit comprise entre 0,4 et 0,6 est supérieure à 0,9. *Indication:* On pourra utiliser le théorème central limite.

Données: On rappelle que si Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{P}(Z \leq 1.28) \simeq 0,9, \mathbb{P}(Z \leq 1.64) \simeq 0,95, \mathbb{P}(Z \leq 1.96) \simeq 0,975.$$

Exercice 4. Soit $a > 0$. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + h(x)h(y)$$

avec h la fonction:

$$h(t) = t\ \mathbf{1}_{|t|\leq a}.$$

1) Montrer que pour $a > 0$ suffisamment petit, f est bien la densité d'un vecteur aléatoire (X,Y) de $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer alors les lois marginales du vecteur (X,Y).

3) Le vecteur (X,Y) est-il gaussien? (Justifier très rapidement.)

4) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$ en fonction de a.

5) Calculer la covariance de X et de Y en fonction de a.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \text{ et } V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}.$$

1) Montrer que le vecteur (U,V) est gaussien. Préciser sa loi.

2) Montrer que

$$XY = \frac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right).$$

3) En déduire que les variables aléatoires réelles $2XY$ et $(X^2 - Y^2)$ ont même loi.

Exercice 6. Autour de la loi des grands nombres

Dans tout l'exercice, on considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $\mathcal{L}(X)$ la loi commune. On note $m = \mathbb{E}[X]$ (si cette espérance existe!) et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Le but de cet exercice est de démontrer des versions des lois des grands nombres. Les questions 1) et 2) s'intéressent à des versions de la loi faible des grands nombres et la question 3) à une version de la loi forte des grands nombres. Dans cet execrice, on n'utilisera donc pas la loi forte des grands nombres L^1 (ni L^4).

1) On suppose que X est de carré intégrable.

(i) Montrer que S_n/n converge dans L^2 vers m.

(ii) En déduire que S_n/n converge également en probabilité vers m.

2) On suppose que X est simplement intégrable.

(i) Montrer que S_n/n converge en loi vers m.

(ii) En déduire que S_n/n converge également en probabilité vers m. (On demande ici de refaire la preuve.)

3) Dans cette question, on va montrer une version de la loi forte des grands nombres. On suppose que $\mathbb{E}[e^{t|X|}]$ est fini pour tout $t \geq 0$. Le but est de montrer que S_n/n converge presque sûrement vers m. Pour simplifier, on suppose également que $m = E[X] = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon nt}\mathbb{E}[e^{tX}]^n.$$

b) On pose $\alpha = \inf_{t\geq 0} e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$, montrer que $\alpha < 1$ (on pourra dériver en $t = 0$) et que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \alpha^n.$$

c) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$. Justifier que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$.

d) Conclure.