Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2012-2013

EXAMEN - Vendredi 03 Mai 2013

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

EXERCICE 1.

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité $0 < p < 1$ d'obtenir pile à chaque partie. Soit $n \geq 1$ un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

- **le Jeu 1 :** le joueur effectue $2n-1$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins n fois pile.
- **le Jeu 2 :** le joueur effectue $2n$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins $n+1$ fois pile. De plus, s'il obtient n fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec la probabilité $1/2$.

On note X (resp. Y) le nombre de piles obtenu lorsque le joueur choisit le Jeu 1 (resp. le Jeu 2).
On note v_1 la probabilité de gagner au Jeu 1 et v_2 la probabilité de gagner au Jeu 2.

1) Exprimer v_1 et v_2 à l'aide de probabilités d'évènements définis par les variables aléatoires X et Y.

2) Identifier les lois de X et de Y.

3) a) Que peut-on dire des lois des variables Y et $X + \epsilon$ où ϵ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p qui est indépendante de X ? Justifiez.

b) En déduire que : $\mathbf{P}(Y > n) = \mathbf{P}(X > n) + p\,\mathbf{P}(X = n)$.

4) Vérifier que l'on a : $v_1 - v_2 = (1-p)\,\mathbf{P}(X = n) - \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y = n)$.

5) Vaut-il mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2 ? Justifiez.

EXERCICE 2.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité est donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = C(y^2 - x^2)e^{-y}\,\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x, y)$$

où C est une constante réelle et $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/ -y < x < y \quad \text{et} \quad y > 0\Big\}$.

Rappel : on pourra utiliser sans démonstration le rappel suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt = (n-1)!$

1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$ et déterminer la constante C.

2) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$. Montrer que la variable $X^{2k+1}Y^q$ est intégrable puis que $\mathbf{E}(X^{2k+1}Y^q) = 0$.

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles corrélées ? Sont-elles indépendantes ? Justifiez.

4) On définit les variables S et T par : $S = X + Y$ et $T = Y - X$.

a) Déterminer la loi du couple (S, T).

b) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ? Justifiez.

c) Déterminer les lois marginales du couple (S, T).

EXERCICE 3.

Soit $0 < p < 1$. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ c'est-à-dire telles que :

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p.$$

1) a) Calculer $\mathbf{E}[X_1]$.

b) Calculer la fonction caractéristique φ_{X_1} de X_1.

2) Pour tout $n \geq 1$, on définit : $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. On cherche ici à déterminer la loi de Z_n.

a) On pose $p_n = \mathbf{P}(Z_n = 1)$. Exprimer $\mathbf{E}[Z_n]$ en fonction de p_n.

b) Calculer $\mathbf{E}[Z_n]$ à partir de la définition de Z_n. En déduire la loi de Z_n.

3) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

EXERCICE 4.

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration le rappel suivant :

Rappel : Soit $\sigma > 0$. Si $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors sa fonction caractéristique est donnée par : $\varphi_Z(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On considère $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes, centrées, de carré intégrable et telles que : $\mathbf{E}(X_k^2) = 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\alpha \geq 1$ un réel.
On définit la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ en posant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Calculer l'espérance et la variance de Y_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel $\alpha \geq 1$ assurant que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers 0.

3) En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $\alpha > 3/2$ alors $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4) Dans tout ce qui suit, on suppose que $\alpha \geq 1$ et que les variables X_k (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) sont des v.a.r. gaussiennes.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\sigma_n^2 = n(n+1)/n^{2\alpha}$. Déterminer la loi de la variable Y_n en fonction de σ_n^2.

b) Montrer que pour tout $\alpha \geq 1$, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z_α qui dépend de α. Expliciter la loi de Z_α.

EXERCICE 5.

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Soient a, b et c trois réels tels que : $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 = 1$.
On pose

$$U = aX - bZ + 2, \qquad V = cY, \qquad W = bX + aZ - 1.$$

Montrer que U, V et W sont des variables aléatoires réelles gaussiennes et indépendantes. Donner leurs lois.