Université de Bordeaux, Licence 3 10/03/2017.

Probabilités DS

durée 1h30 - la calculatrice Casio collège est autorisée.
On justifiera proprement tous les calculs. Le barême est indicatif.

EXERCICE 1. (5 points)

A) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On rappelle que la densité de X est donnée par:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X < a)$ et $\mathbb{P}(X > b)$.

B) Une boîte d'ampoules contient une proportion $p = 1/10$ d'ampoules défectueuses. On suppose que la durée de vie en jours d'une ampoule normale suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\frac{1}{1000})$ et que celle d'une ampoule defectueuse suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\frac{1}{100})$.

1) On choisit une ampoule "au hasard" dans la boîte. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne (strictement) avant la fin du 30 ème jour?

2) On choisit une ampoule "au hasard" dans la boîte. Sachant qu'au bout d'une année (365 jours), elle fonctionne encore, quelle est la probabilité que l'on ait choisi une ampoule défectueuse?

On donnera et justifiera les formules permettant d'aboutir au résultat. On ne fera pas les calculs numériques.

EXERCICE 2. (5 points)

1) Un singe tape "au hasard" sur un clavier d'ordinateur un "mot" de 7 lettres. (Chaque lettre a autant de chance d'apparaître, les répétitions de lettres sont possibles et le "mot" n' a pas de raison d'exister). On rappelle que l'alphabet possède 6 voyelles et 20 consonnes.

Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ naturellement associé à cette expérience aléatoire; puis calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A="le mot obtenu comporte au moins une voyelle et une consonne".

b) B="le mot obtenu comporte exactement trois fois la lettre Z".

2) On considère maintenant que, pour former un "mot", le singe tire au hasard 7 lettres dans un sac contenant exactement les 26 lettres de l'alphabet. Décrire le nouvel espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}')$ naturellement associé à cette expérience aléatoire; puis calculer la probabilité que le "mot" obtenu ait au moins 4 voyelles.

On donnera et justifiera les formules permettant d'aboutir au résultat. On ne fera pas les calculs numériques.

EXERCICE 3. (6 points) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur les entiers de 1 à n avec $n \geq 2$ et soit Y une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

On rappelle que pour $N \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

2) On pose $W = XY$. Donner la loi de W.

3) Calculer l'espérance et la variance de W.

4) On pose également $Z = X + Y$, calculer l'espérance et la variance de Z.

5) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z = n)$.

6) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\{W = 0\} \cap \{Z = n\})$ et $\mathbb{P}(\{W = 1\} \cap \{Z = n\})$. Les variables aléatoires W et Z sont elles indépendantes? Justifier.

7) Exprimer la covariance de W et Z en fonction de $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$.

EXERCICE 4. (4 points)

1) On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} c\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donner une condition sur c pour que h soit la densité d'une variable aléatoire.

2) On considère alors X une variable aléatoire admettant h pour densité. On pose alors $Y = \frac{1}{X}$.

Calculer la fonction de répartition puis la densité de Y. Que remarque-t-on?

3) Que peut-on dire de l'espérance de X? Justifier votre réponse.