Exercice 5 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d telle que $E[X_1^2] < +\infty$.
On note $\mu = E[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.

1) On pose $X_n' = X_n - \mu$
$S_n' = X_1' + \dots + X_n'$
$Z_n = \frac{S_n'}{n}$.

$E[X_n'] = E[X_n] - \mu = \mu - \mu = 0$.
$Var(X_n') = Var(X_n)$

donc $E[S_n'] = E[X_1'] + \dots + E[X_n'] = 0$.

$$Var(S_n') = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i')$$
$$= n\, Var(X_1) = n\sigma^2.$$

et $E[Z_n] = 0$

$$Var(Z_n) = \frac{1}{n^2} Var(S_n') = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2) Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$
Par Bienaimé - Tchebychev,

$$P(|Z_n| \geq \varepsilon) = P(|Z_n|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[|Z_n|^2]}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{Var(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{n^2}.$$

3) Donc si $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|Z_{n^2}| \geq \varepsilon) < +\infty$

et par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\left(\limsup_n \{ |Z_{n^2}| \geq \varepsilon \} \right) = 0$

et donc $Z_{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.

4) Soit $n \geq 1$ et $m = [\sqrt{n}]$

on a $m \leq \sqrt{n} < m+1$

d'où $m^2 \leq n < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$.

et $n - m^2 \leq 2m \leq 2\sqrt{n}$.

5) On pose alors : $Z_n = A_n + B_n$

avec $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m^2} X_k'$ et $B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=m^2+1}^{n} X_k'$.

$$A_n = \left(\frac{m^2}{n}\right) \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m^2} X_k'$$

$$= \left(\frac{m^2}{n}\right) Z_{m^2}.$$

Or $Z_{m^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$ et $\frac{m^2}{n} \to 1$

donc $A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.

6) Soit $\varepsilon > 0$, par Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|B_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=m^2+1}^{n} X_k' \geq \varepsilon n\right)$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{k=m^2+1}^{n} X_k'\right)}{\varepsilon^2 n^2}$$

$$= \frac{(n-m^2)\,\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2 n^2}$$

$$\leq \frac{2\sqrt{n}\,\sigma^2}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{3/2}}.$$

Comme précédemment $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|B_n| \geq \varepsilon) < +\infty$

et $B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.

7) $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$, $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$

donc $\exists$ A tel que si $\omega \in A$, $A_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
et $\mathbb{P}(A) = 1$.

$\exists B$ tel que si $\omega \in B$, $B_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
et $\mathbb{P}(B) = 1$.

donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ et si $\omega \in A \cap B$

$Z_n(\omega) = A_n(\omega) + B_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$

et $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{S_n' + n\mu}{n} = \dfrac{S_n'}{n} + \mu$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mu$.