

Feuille d'exercices 3

Exercice 1.

Un traitement est administré à trois doses différentes D_1 , D_2 et D_3 , à un groupe de sujets atteints d'une même maladie. L'expérimentation est faite en double aveugle. On compte le nombre de guérisons pour chaque dose. Les résultats sont les suivants :

	Sujets guéris	Sujets non guéris	Total
Dose D_1	30	30	60
Dose D_2	42	35	77
Dose D_3	58	31	89
Total	130	96	226

L'efficacité du traitement est-elle liée à la dose utilisée ?

- 1) Formuler l'hypothèse nulle testée.
- 2) Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 2. L'étude de 320 familles ayant 5 enfants s'est traduite par la distribution suivante :

	A	B	C	D	E	F	Total
Garçons	5	4	3	2	1	0	
Filles	0	1	2	3	4	5	
Familles	18	56	110	88	40	8	320

On veut comparer cette distribution à la distribution théorique qui correspond à l'équiprobabilité de la naissance d'un garçon et de la naissance d'une fille.

- 1) Quelle est la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de cinq enfants, dans l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances des garçons et des filles.
- 2) La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test du χ^2 puis de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro 1 est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire qu'il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires	29	19	18	25	17	10	15	11

- 1) Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
- 2) La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test du χ^2 puis de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4.

On a testé un échantillon de 5 appareils. Leurs durées de vie en heures ont été $\{133 ; 169 ; 8 ; 122 ; 58\}$. On voudrait savoir si la durée de vie suit une loi exponentielle.

- 1) Estimer le paramètre λ de la loi exponentielle.
- 2) Poser les hypothèses à tester (hypothèse nulle et hypothèse alternative).
- 3) La comparaison de la distribution observée à la distribution théorique s'effectue par un test de Kolmogorov-Smirnov. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5.

On mesure la taille de 100 personnes et on obtient les résultats suivants :

Taille X	160	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	182
Effectifs	1	0	5	7	15	23	25	12	8	2	1	1

On voudrait tester au niveau $\alpha = 0.05$ l'hypothèse : $H_0 : X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où μ et σ^2 sont inconnus.

Exercice 6.

Afin de déterminer s'il existe un écart systématique entre les indications données par deux spectromètres, une série de 10 mesures est effectuée sur chacun d'eux. Les deux ensembles de résultats vont servir à comparer les moyennes m_1 et m_2 des 2 populations. Des vérifications préalables ont montré que les résultats des mesures suivent des lois normales. On a les valeurs suivantes :

X	5.33	5.13	5.16	5.09	5.49	5.32	5.24	5.23	5.27	5.36
Y	5.32	5	5.14	5	5.35	5.17	5.4	5.26	5.13	5.18

Testez au niveau $\alpha = 0.1$ l'hypothèse : $H_0 : m_1 = m_2$.

Exercice 7.

Pendant 100 intervalles de 10 minutes on a compté le nombre d'ouvriers X se présentant à un magasin pour emprunter des outils ; ce qui a donné le tableau suivant :

Nombre d'ouvriers	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Nombre d'intervalles	5	6	5	6	9	12	11	12	8	9	7	5	5

Imaginer un test pour vérifier le caractère poissonien de la loi de X .

Exercice 8.

On veut tester l'hypothèse que le diamètre moyen μ de tuyau est de 3 cm. La règle de décision choisie rejette H_0 si le diamètre moyen de 30 tuyaux est inférieur à 2.993 ou supérieur à 3.007. On sait que l'écart-type est $\sigma = 0.025$.

- 1) Déterminer l'erreur de première espèce.
- 2) Déterminer l'erreur de deuxième espèce si la moyenne véritable est 3.005.

Exercice 9.

Le résultat X de 300 essais avec un dé à jouer est résumé dans le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6
Effectifs	30	40	58	57	48	63

On propose la distribution de probabilité suivante

$$p(x, \theta) = \begin{cases} (1 - \theta)/6 & \text{si } x = 1 \\ 1/6 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ (1 + \theta)/6 & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

- 1) Testez l'ajustement des données au modèle équiprobable.
- 2) Estimez θ avec la méthode des moments.
- 3) Testez l'ajustement des données au modèle issu de l'estimation précédente.

Exercice 10.

On observe le nombre d'erreurs X lors de la première compilation d'un programme Matlab demandé à des étudiants inscrits à la préparation à l'Agrégation

Nombre d'erreurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11
Effectifs	25	18	14	11	8	7	6	4	2	2	1	1	1

Testez l'ajustement des données au modèle

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{13 - x}{91} \quad x = 0, 1, \dots, 12.$$

Exercice 11.

On mesure la distance en micron du centre de gravité d'un objet à l'extérieur de sa surface à l'aide d'un instrument de contrôle.

Intervalles	[0,16]	[16,32]	[32,48]	[48,64]	[64,80]	[80,96]	[96,112]	[112,128]	[128,144]	[144,160]
Effectifs	40	129	140	91	91	45	19	8	3	1

Testez l'ajustement des données à une distribution de Raleygh

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} x \exp -x^2/2\theta^2 \quad x > 0, \theta > 0.$$