COMPLÉMENT I

Contexte d'apparition des lois usuelles

1. Lois discrètes

(1) **Loi de Bernoulli de paramètre p, $0 \leq p \leq 1$.**
A valeurs dans $\{0; 1\}$, avec $P(X = 1) = p$. $\mathbb{E}[X] = p$. $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$. C'est une brique de base, comme les fonctions indicatrices en analyse. En particulier si A est un événement, la variable $X = 1_A$, qui indique si l'événement A s'est ou non produit, suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

(2) **Loi binomiale de paramètres (n, p), $n \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1$.**
A valeurs dans $\{0; 1; \ldots; n\}$, avec $\forall 0 \leq k \leq n, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
$\mathbb{E}[X] = np$; $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
C'est la loi de la somme de n v.a. de Bernoulli indépendantes et de même loi ; de manière équivalente c'est la loi du nombre de succès lorsqu'on répète n expériences indépendantes qui ont une probabilité de réussite p.
A noter qu'on appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p une telle expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

(3) **Loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$.**
A valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
(la loi de $X - 1$, définie sur $\mathbb{N}$, est aussi parfois appelée loi géométrique).
$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$;
C'est la loi de l'instant du premier succès lorsqu'on répète des expériences indépendantes ayant une probabilité de succès p.
C'est l'équivalent discret de la loi exponentielle, puisque c'est une loi sans mémoire :
$P(X > k + l | X > k) = P(X > l)$. Il n'est donc pas surprenant que la partie entière supérieure d'une loi exponentielle suive une loi géométrique.
Comme la loi exponentielle, elle peut servir à modéliser des temps de vie (dans un processus sans vieillissement), ou des temps d'attente, lorsque le temps est mesuré de manière discrète (nombre de jours par exemple).

(4) **Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.**
A valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
$\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.
C'est une loi discrète stable, c'est-à-dire que la somme de v.a. indépendantes suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson (de paramètre la somme des paramètres)
On l'appelle aussi loi des événements rares, car la suite de loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{n})$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ. Ainsi on modélise souvent le nombre de succès lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience ayant une chance très faible de réussir par une loi de Poisson (nombre de personnes dans la population française atteints d'une maladie rare, par exemple).
C'est aussi dans le cadre du processus de Poisson la loi du nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle fixé (par exemple $[0, t]$).

(5) **Loi hypergéométrique de paramètres** (n, r, r_1)**.** $(n, r, r_1) \in \mathbb{N}^*, r_1 \leq r; n \leq r$.

A valeurs dans $\{0, \ldots, \min(n, r_1)\}$; $P(X = k) = \dfrac{\begin{pmatrix} r_1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r - r_1 \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}}$.

$\mathbb{E}(X) = \frac{nr_1}{r}$

C'est la loi du nombre de boules rouges qu'on obtient lorsqu'on tire *sans remise* n boules dans une urne contenant r boules dont r_1 boules rouges (si on tire avec remise on répète des expériences identiques indépendantes et on obtient une loi binomiale).

C'est une loi qu'on trouve en théorie des sondages, lorsqu'on tient compte de la taille finie de la population.

(6) **Loi multinomiale**

C'est une généralisation de la loi binomiale dans le cas où on répète n fois des expériences indépendantes identiques pouvant avoir k résultats (et pas seulement 2) (par exemple un lancer de dé) avec probabilités respectives $p_1, \ldots, p_k$: le k-uplet qui indique combien de fois on a obtenu chaque résultat suit alors une loi multinomiale de paramètres $(n, p_1, \ldots, p_k)$.

Ainsi si X suit une telle loi, X est à valeurs dans $\{(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k, \sum_{i=1}^k m_i = n\}$ et vérifie $P(X = (m_1, \ldots, m_k)) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}$.

2. Lois à densité

(1) **Loi uniforme sur** $[a, b]$**,** $a < b$**.**

Densité $\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$

$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

C'est un peu l'analogue de la loi d'équirépartition sur un ensemble fini ; par exemple, si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, ses décimales sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $\{0, \ldots, 9\}$. De même, son approximation décimale à 10^{-n} par défaut (où n est fixé) suit une loi équirépartie sur un ensemble à 10^n éléments.

(2) **Loi uniforme sur un borélien** $A \subset \mathbb{R}^d$**,** $0 < \lambda(A) < \infty$

Loi à valeurs dans $A \subset \mathbb{R}^d$, de densité $\frac{1_A(x)}{\lambda(A)} d\lambda(x)$ où λ est la mesure de Lebesgue.

C'est la généralisation à un ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la notion d'équirépartition ; on retrouve en particulier une formule du type "Cas favorables/Cas total" : Si $B \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}(X \in B) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$.

De plus son espérance est le centre de gravité de A.

(3) **Loi normale (ou gaussienne)** $N(m, \sigma^2)$**,** $m \in \mathbb{R}$**,** $\sigma > 0$**.**

A valeurs dans $\mathbb{R}$. Densité $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$.

$\mathbb{E}[X] = m$; $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

C'est une famille de lois stables sur $\mathbb{R}$: la somme de v.a. indépendantes de lois normales suit une loi normale. Le théorème central limite (et son cas particulier Laplace-Gauss) explique qu'elle soit aussi omniprésente : lorsqu'un phénomène s'explique par une addition de grands nombres de variables indépendantes on pourra souvent le modéliser par une loi normale ; c'est par exemple le cas lorsqu'on cherche à modéliser une erreur qui est une somme d'un grand nombre d'erreurs indépendantes.

Comme c'est une loi qui permet de faire beaucoup de calculs assez facilement, elle est aussi souvent utilisée par commodité lorsqu'on sait qu'on a une v.a. dont la densité est "en forme de cloche", à peu près symétrique par rapport au sommet de la cloche, avec une décroissance très rapide.

Cette décroissance très rapide de la densité de la loi normale explique qu'on n'hésite pas à l'utiliser pour modéliser des grandeurs dont on sait qu'elles sont positives (comme des poids ou des tailles), alors même que la loi normale est une loi sur $\mathbb{R}$.

(4) **Loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$**.**

A valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Densité $\lambda \exp(-\lambda x) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Sa caractéristique principale est que c'est une loi sans mémoire (comme la loi géométrique) : $P(X > t + s|X > t) = P(X > s)$. Elle va donc servir à modéliser des durées de vie ou de fonctionnement dans des situations "sans vieillissement". C'est la loi qui gouverne la durée de vie d'atomes radioactifs, par exemple. On l'utilise souvent pour modéliser des temps d'attente (dans les processus de file d'attente). Elle intervient également dans le processus de Poisson.
Du fait qu'elle est sans mêmoire, le minimum de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle suit également une loi exponentielle (de paramètre la somme des paramètres).

(5) **Loi d'Erlang de paramètres (n, λ), $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 0$.**
A valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Densité $\lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.
$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$
C'est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Elle intervient dans le processus de Poisson comme loi du n-ème top.

(6) **Loi du chi-deux à n degrés de liberté, $n \in \mathbb{N}^*$.**
A valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Densité $(\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \exp(-\frac{x}{2}) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$
$\mathbb{E}[X] = n$, $\mathrm{Var}(X) = 2n$.
C'est la loi de la somme des carrés de n variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite ; ou encore la loi du carré de la norme d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ de loi $N(0, 1_n)$.
Elle intervient très souvent en statistique, comme loi d'un estimateur de la variance, ou dans les tests justement appelés tests du χ^2 : test d'adéquation à une loi donnée, ou test d'indépendance.

Ces trois dernières lois sont des cas particuliers des lois Γ.

(7) **Loi Gamma de paramètres (p, λ), $p > 0$, $\lambda > 0$.**
A valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Densité $\frac{\lambda}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{p-1} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$
$\mathbb{E}[X] = \frac{p}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.
En particulier la loi exponentielle est une loi gamma $\Gamma(1, \lambda)$. Le paramètre p supplémentaire permet de tenir compte du vieillissement lorsqu'on modélise des durées de fonctionnement d'appareil.