PROBA

Martingales

$(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

Exercice 1. Martingale de Wald Soit $X_0 = 0$ et $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, et $u \in \mathbb{R}$ un réel tel que la fonction génératrice $g(u) = E[e^{uX}]$ est bien définie. Montrer que la suite définie par $Y_0 = 1, Y_n = g(u)^{-n} e^{u\sum_{i=1}^n X_i}$ est une martingale par rapport à la filtration $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 2.

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et soit k un entier positif. On pose $S_0 = k$ et $S_n = S_{n-1} + X_n$.

(1) Montrer que $Y_n = (q/p)^{S_n}$, où $p = P(X_1 = 1)$ et $q = 1 - p$ est une martingale.

(2) Soit $N > k$. On s'intéresse maintenant à un autre processus Z_n défini par $Z_0 = k$ et $Z_n = Z_{n-1} + X_n$ si Z_{n-1} est compris (au sens strict) entre 0 et N, et $Z_n = Z_{n-1}$ sinon. Exprimer Z_n à partir de S_n en terme de martingale arrêté (en définissant un temps d'arrêt convenable) et justifier que $W_n = (q/p)^{Z_n}$ est une martingale.

(3) Que pouvez-vous dire de la convergence de Y_n ? de W_n ?

Exercice 3. Soit $Y_0 = 0$ et $(Y_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance $\sigma^2 < \infty$. Montrer que la suite définie par $X_n = (\sum_{k=0}^n Y_k)^2 - n\sigma^2$ est une martingale par rapport à la filtration $\sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Exercice 4.Modèle de Wright Fisher

On considère une population de taille **fixe** N dans laquelle chaque individu est de type A ou B (en génétique ce sont par exemple les deux allèles d'un même gène).
Soit X_n le nombre d'individus de la n-ième génération ayant le caractère A. Le modèle consiste à considérer que les individus de la $n+1$ème génération s'obtiennent en tirant avec remise N individus parmi les individus de la $n$ème génération : si on suppose qu'on a un seul parent, cela revient à dire que pour chaque individu de la $n+1$ème population, on tire au sort de manière indépendante son ancêtre parmi les individus de la $n$ième génération.
Selon ce modèle (simplifié) la loi de X_{n+1} sachant X_n est donc une loi binomiale $Bin(N, \frac{X_n}{N})$.
On suppose de plus que $X_0 = a$, fixé et connu.

(1) Commenter le modèle.

(2) Montrer que X_n est une martingale. Que peut-on dire de la convergence de X_n ?

(3) Quelle est la probabilité que le gène A finisse par disparaître ?

(4) Proposer une illustration informatique.

Exercice 5. Urne de Polya.

Il s'agit d'une modélisation de propagation de maladie contagieuse. On identifie la population à des boules dans une urne : les individus malades correspondent à des boules rouges, les autres à des boules blanches. A chaque instant, on tire une boule de l'urne et on la replace dans l'urne avec c boules de la même couleur.

La version simplifiée que l'on va regarder consiste à prendre $c = 1$, et à supposer que l'urne contient initialement deux boules : une blanche et une rouge.
Avec ce modèle il y a $n+1$ boules avant le n-ième tirage. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de boules rouges dans l'urne avant le n-ième tirage et $M_n = S_n/(n+1)$ la proportion associée. Soit X_{n+1} la variable aléatoire valant 1 si la n-ième boule tirée est rouge et 0 sinon. On définit enfin la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $(X_n)_{n\geq 2}$ avec la convention $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

1) Déterminer S_n en fonction de $X_2, \ldots, X_n$.

2) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. En déduire que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale.

3) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire M_∞. Que peut-on dire de la convergence du rapport (Nombre de boules rouges)/(Nombre de boules blanches) ?

4) Démontrer par récurrence que S_n suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.

5) En déduire la fonction génératrice de M_n puis la loi de M_∞.

Exercice 6.Processus autorégressif

Les processus autorégressifs sont souvent utilisés en économie pour modéliser des évolutions de cours boursiers. Un exemple d'un tel processus est une suite (X_n) vérifiant $X_0 = a$ où $0 < a < 1$ est une constante et $X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta)\epsilon_{n+1}$, où $\theta \in]0,1[$ est un paramètre fixé et où la loi de ϵ_{n+1} sachant F_n est une loi de Bernoulli de paramètre X_n.

(1) Vérifier que la définition a un sens, c'est à dire que pour tout entier n $X_n \in [0,1]$.

(2) Montrer que X_n est une martingale.

(3) Que peut-on dire de sa convergence ?

(4) Identifier la loi limite.

Exercice 7.Théorème des 3 séries Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes. Pour $a > 0$ on pose $Y_n^a = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq a\}}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que les trois séries $\sum_{n\geq 1} P(|X_n| > a)$, $\sum_{n\geq 1} E(Y_n^a)$ et $\sum_{n\geq 1} V(Y_n^a)$ convergent.

1. En utilisant le théorème de convergence des martingales L^2, montrer que $\sum_{n\geq 1}(Y_n^a - E(Y_n^a))$ et $\sum_{n\geq 1} Y_n^a$ convergent P-p.s.

2. Montrer que $P(\limsup_{n\to+\infty}\{X_n \neq Y_n^a\}) = 0$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge P-p.s.

Exercice 8. Une preuve de la loi forte des grands nombres.

On considère (X_n) une martingale telle que $X_0 = 0$ et

$$M = \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] < +\infty.$$

1) Montrer que $\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$.

2) En déduire que $\mathbb{E}[X_n^2] \leq Mn$ puis que

$$\frac{X_n}{n} \to 0 \quad \text{dans } L^2.$$

3) Soit $Y_n = \sum_{1\leq k\leq n}(X_k - X_{k-1})/k$. Montrer que (Y_n) est une martingale.

4) Montrer qu'elle est bornée dans L^2. En déduire qu'elle converge p.s.

5) On admet que si (x_n) est une suite de nombre réels telle que la série $\sum_{k\geq 1}(x_k - x_{k-1})/k$ est convergente alors la suite de terme général x_n/n tend vers 0. En déduire que

$$\frac{X_n}{n} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

6) Retrouver la version suivante de la loi forte des grands nombres :

soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes dans L^2 de même espérance μ alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \mu \quad \text{p.s.}$$

Exercice 9. On suppose que la somme que doit verser une compagnie d'assurances pour couvrir les accidents chaque mois est modélisée par une variable aléatoire normale d'espérance μ et de variance σ^2, et que les sommes (Y_n) correspondants à des mois différents (indexés par n) sont indépendantes. On note ainsi $C(n) = \sum_{i=1}^n Y_i$ la somme que doit débourser la compagnie pendant les n premiers mois.
On note également A la trésorerie initiale de la compagnie d'assurances, et $D(n) = A + Pn$, où P est le montant des primes encaissées par mois, l'argent total rentré pendant les n premiers mois.
On note $R(n) = D(n) - C(n)$ l'argent restant au bout de n mois.
Enfin, on considère le temps $T = \min\{n \geq 1, R(n) \leq 0\}$ (avec la convention $\min(\emptyset) = +\infty$) : $P(T < +\infty)$ est donc la probabilité que la compagnie se retrouve un jour en déficit. Le but de l'exercice est d'obtenir une majoration de cette probabilité.

(1) Vérifier que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ où on a noté $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(2) Soit $u \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $e^{u(P-Y_1)}$ est intégrable ; on pose $g(u) = E[e^{u(P-Y_1)}]$. Montrer que $g(u) = \exp(u(P-\mu) + \frac{u^2\sigma^2}{2})$

(b) Vérifier que la suite (W_n) définie par $W_0 = e^{uA}$ et $W_n = \frac{e^{uR(n)}}{g(u)^n}$ est une $(\mathcal{F}_n)$- martingale.

(c) Justifier que W_n converge presque sûrement.

(d) On suppose $P < \mu$. Vérifier qu'il existe alors $u_0 > 0$ tel que $g(u_0) < 1$, et en déduire qu'on a alors presque sûrement $\lim R(n) = -\infty$. Que vaut alors $P(T < +\infty)$?

(e) **On suppose désormais** $P > \mu$
Soit $m > 0$. Justifier l'égalité $E[W_{T\wedge m}] = e^{uA}$ et en déduire l'inégalité $E[W_T 1_{T\leq m}] \leq e^{uA}$.

(f) En déduire

$$P(T \leq m) \leq \exp(-2A\frac{P-\mu}{\sigma^2})$$

(on pourra montrer qu'on peut choisir $u < 0$ tel que $g(u) = 1$).

(g) En déduire une majoration de $P(T < +\infty)$.

Exercice 10. Un ivrogne se déplace à chaque pas de temps de façon aléatoire d'un pas vers la gauche ou vers la droite ; les déplacements successifs sont indépendants les uns des autres, et on note $P(Droite) = p$. Le bar dont il est sorti à l'instant 0 est à l'abscisse 0, sa maison est à l'abscisse $-a$, et à l'abscisse b il y a la Garonne (a et b sont dans $\mathbf{N}^*$). Si on note Z_n la position de l'ivrogne à l'instant n, on a $Z_0 = 0$, $Z_{n+1} = -a$ si $Z_n = -a$, $Z_{n+1} = b$ si $Z_n = b$, et $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$ sinon, où les X_i sont une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $(1-p)\delta_{-1} + p\delta_1$. On cherche la probabilité que l'ivrogne finisse sans encombre chez lui.

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T = \min\{n \in \mathbf{N}/S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$, (avec la convention $\min(\emptyset) = +\infty$).

(1) Montrer que $P(-a \leq S_n \leq b)$ tend vers 0, et en déduire que $T < \infty$ presque sûrement (si $p \neq 1/2$, on pourra considérer la suite S_n/n, et si $p = 1/2$, on pourra considérer $S_n/\sqrt{n}$).

(2) On suppose $p = 1/2$.

(a) Montrer que Z_n et S_n sont deux martingales par rapport à la suite des tribus $F_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Montrer que T est un temps d'arrêt, et expliquer pourquoi $Z_n = S_{\min(T,n)}$.

(c) Montrer que Z_n converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire Z à valeurs dans $\{-a; b\}$.

(d) En considérant $E[Z]$, montrer que la probabilité que l'ivrogne finisse tranquillement chez lui (et pas dans la Garonne) est $b/(a+b)$.

(e) Montrer que $S_n^2 - n$ est une martingale, puis que $E[T] = E[S_T^2] = ab$.

(3) On ne suppose plus que $p = \frac{1}{2}$. Montrer alors que $Y_n = (\frac{p}{1-p})^{S_n}$ est une martingale par rapport à F_n.

(a) En considérant Y_T, déterminer la probabilité que l'ivrogne finisse dans son lit.

(b) Montrer que $E[Z_n] = E[\min(T,n)](2p-1)$.

(c) En déduire que $E[T]$ est finie et donner sa valeur.

(4) On suppose maintenant qu'il n'y a pas de Garonne, et que la rue continue indéfiniment vers la droite. On note alors $T' = \min_{n\in\mathbb{N}}\{n/S_n = -a\}$ le temps d'atteinte de la maison.

(a) On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer par l'absurde qu'alors $E[T'] = +\infty$.

(b) Montrer que si $p < 1/2$, $P(T' < +\infty) = 1$. Montrer $E[S_{\min(T',n)}] = E[\min(T',n)](2p-1)$. En déduire $E[T'] < \infty$, puis sa valeur.

(c) On suppose que $p > 1/2$.

(i) Montrer que $M_n = (\frac{1-p}{p})^{S_n}$ est une martingale.

(ii) Montrer que $M_{\min(T',n)}$ converge presque sûrement et dans L^1, vers une variable aléatoire M à valeurs dans $\{0, (\frac{p}{1-p})^a\}$.

(iii) En déduire que la probabilité que l'ivrogne rentre chez lui est $(\frac{1-p}{p})^a$.