TP noté 2012

M'envoyer TOUS les fichiers nécessaires par mail à la fin du TP du 7 décembre et me rendre les calculs sur papier.
Mon mail : chabanol@math.u-bordeaux1.fr
Les questions "N" demandent une réponse numérique, les questions "T" une réponse théorique.

Vous pouvez mettre des commentaires dans un fichier matlab en commençant une ligne par %; essayez de séparer les réponses numériques aux différentes questions par une ligne débutant par %%

`Exercice 1` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Pareto de densité $\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}1_{[1,+\infty]}(x)$ où α est un paramètre réel strictement positif.

(1) (T) Pour quelles valeurs de α les hypothèses de la loi forte des grands nombres sont-elles vérifiées pour cette suite ? Pour quelles valeurs de α les hypothèses du théorème central limite sont-elles vérifiées ?

(2) (T) Déterminer lorsqu'elle existe $E[X_1]$, et en déduire dans ce cas un estimateur sans biais de α. Est-il convergent ?

(3) (T) Déterminer la fonction de répartition de X_1.

(4) (N) Illustrer numériquement la convergence (ou non convergence) obtenue à la question 2.

`Exercice 2.` On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé les points A, B et C de coordonnées respectives $(0,0)$, $(2,0)$ et $(1,1)$. On note T l'intérieur du triangle ABC.

(1) (T) Soit M un point de coordonnées (x,y). Ecrire sous forme d'un système d'inéquations la propriété $M\in T$.

(2) (N) Générer un échantillon de points dans le plan de loi uniforme sur T.

(3) (NT) Observer numériquement la fonction de répartition empirique de leur abscisse. Comparer avec la fonction de répartition théorique.

(4) (NT) Même question avec l'ordonnée.

(5) (NT) On cherche à obtenir une valeur approchée de l'aire de l'intersection de T avec le disque de centre D de coordonnées $(0.5,0.5)$ et de rayon 0.8. Exprimer cette aire à l'aide d'une probabilité; en donner une estimation, puis un intervalle de confiance.

`Exercice 3.`
Soit $0<p<1$ un réel. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telles que X_n suit une loi géométrique de paramètre $\frac{p}{n}$ et on pose pour tout entier n $Y_n=\frac{X_n}{n}$.

(1) (T) Déterminer pour tout entier n la fonction de répartition de Y_n.

(2) (T) Montrer que Y_n converge en loi vers une loi que l'on déterminera.

(3) (N) Illustrer la convergence précédente.

`Exercice 4` M. Shadock peut être dans trois états : bonne santé, enrhumé, malade. Son état le jour $n+1$ dépend de son état au jour n et pas des jours précédents : s'il est en bonne santé, il le reste le lendemain avec probabilité $\frac{5}{6}$, il devient malade avec probabilités $\frac{1}{12}$. S'il est malade, il le reste avec probabilité $\frac{3}{4}$ et devient en bonne santé avec probabilité $\frac{1}{4}$. S'il est enrhumé, il guérit avec probabilité $\frac{1}{4}$ et devient malade avec probabilité $\frac{1}{4}$.

(1) (N) Écrire la matrice de transition de la chaîne qui peut modéliser la situation.
(T) La chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ?

(2) (N) On suppose que le premier janvier M. Shadock est en bonne santé. Quelle est la probabilité que M. Shadock soit malade le jour de son anniversaire le 10 janvier ? Quelle est la probabilité qu'il soit en pleine forme le 31 décembre ?

(3) (TN) Justifier l'existence d'une unique probabilité invariante pour la chaîne. Déterminez-la à l'aide de matlab (et par exemple la fonction `eig`).

(4) (N) On suppose encore que le premier janvier M. Shadock est en bonne santé. Soit μ_n la loi de l'état de santé de M. Shadock le n-ième jour. A-t-on convergence en loi de μ_n ?

(5) (N) Recommencer avec une loi μ_0 différente. Observe-t-on encore une convergence en loi ?

(6) (N) Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de simuler la chaîne :

```
function Y = Shadock( X )
U=rand(1);
if (X==1) Y=1*(U<5/6) + 2*(U>5/6 && U<11/12) + 3*(U>11/12); end
if (X==2) Y=...; end
if (X==3) Y=...; end
end
```

(7) (N) On suppose maintenant que M. Shadock est enrhumé le 1er janvier. Ecrire une fonction qui simule la chaîne jusqu'au premier jour où M. Shadock sera en bonne santé.

(8) (N subsidiaire) Estimer l'espérance du temps que cela prend à M. Shadock lorsqu'il est enrhumé avant d'être guéri (c'est-à-dire à nouveau en bonne santé).