Licence Mathématiques 2010/2011
Géométrie différentielle
Correction du DM

Partie I

(1) (a) Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage normal de $\mathcal{C}$ vérifiant $\alpha(0) = 0$. On a donc $\alpha'(0) = \tau_0$, et d'autre part $\forall s \in I ||P\alpha(s)||^2 = R^2$. En dérivant cette égalité en $s = 0$ on trouve $\vec{P0}.\tau_0 = 0$; La base (τ_0, ν_0, β_0) étant orthonormée on en déduit $a = 0$. On a alors puisque $0 \in \mathcal{C}$, $||OP||^2 = a^2 + b^2 + c^2 = R^2$.

(b) $\mathcal{C}$ est dans le plan contenant le point 0, le point P et le vecteur τ_0. On note $u = \frac{\vec{OP}}{||OP||})$. $(0, \tau_0, u)$ forme donc une base orthonormée de ce plan; les coordonnées du centre du cercle dans cette base sont $(0, R)$.
Un paramétrage du cercle de rayon R de centre $(0, R)$ est
$\phi(t) = (R\sin(t), -R\cos(t)+R), t \in \mathbb{R}$. On a bien $\phi(0) = 0$, mais ce paramétrage n'est pas normal puisque $||\phi'(t)|| = R$. On effectue donc le changement de paramétrage $s = tR$ et on obtient le paramétrage normal $\alpha(s) = R\sin(\frac{s}{R}\tau_0 + R(1 - \cos(\frac{s}{R}))u$. On a bien $\alpha'(0) = \tau$.
En explicitant u, il vient finalement
$\alpha(s) = R\sin(\frac{s}{R}\tau_0 + b(1 - \cos(\frac{s}{R}))\nu_0 + c((1 - \cos(\frac{s}{R}))\beta_0$.

(2) On a à l'ordre 2, au voisinage de 0, puisque γ est birégulier,
$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + o(s^2)$
Le paramétrage étant normal, on a $\gamma'(0) = \tau_0$ et d'après les formules de Frenet $\gamma''(0) = \rho(0)\nu_0$, et finalement $\gamma(s) = s\tau_0 + \rho(0)\frac{s^2}{2}\nu_0 + o(s^2)$

(3) On considère un cercle de centre P de rayon R vérifiant les conditions du 1. On suppose qu'il est tel que $\gamma(s) - \alpha(s) = o(s^2)$ au voisinage de 0. Le développement limité de α au voisinage de 0 est $s\tau_0 + b\frac{s^2}{2R^2}\nu_0 + c\frac{s^2}{2R^2}\beta_0 + o(s^2)$. Donc en soustrayant les deux développements
$\gamma(s) - \alpha(s) = o(s^2) \Leftrightarrow (c = 0$ et $\rho - \frac{b}{R^2} = 1) \Leftrightarrow (\vec{OP} = R\nu_0$ et $R = \frac{1}{\rho})$. On trouve bien que l'unique cercle de la question 1 qui convienne est le cercle de centre le centre du cercle osculateur et de rayon le rayon du cercle osculateur.

(4) On peut toujours trouver une base dans laquelle une hélice circulaire admet un paramétrage normal $\gamma(s) = (a\cos(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), a\sin(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$ où a et b sont deux réels positifs fixés non tous deux nuls. On a alors
$\gamma''(s) = (-\frac{a}{a^2+b^2}\cos(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), -\frac{a}{a^2+b^2}\sin(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), 0)$, on en déduit le rayon de courbure
$R = \frac{1}{||\gamma''(s)||} = \frac{a^2+b^2}{a}$, et le centre de courbure
$OC(s) = \gamma(s) + R\frac{\gamma''}{||\gamma''||} = (\frac{b^2}{a}\cos(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{b^2}{a}\sin(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$. On reconnaît une hélice circulaire, a priori différente de l'hélice de départ, mais de même axe.
L'ensemble des centres de courbure d'une courbe s'appelle la développée de cette courbe.

Partie II

(5) A l'ordre 3, on utilise $\gamma'''(s) = (\rho(s)\nu(s))' = \rho'(s)\nu(s) + \rho(s)(-\rho(s)\tau(s) - \theta(s)\beta(s))$ et on obtient au voisinage de 0, puisque γ est de classe C^3 :
$\gamma(s) = (s - \rho^2(0)\frac{s^3}{6})\tau_0 + (\rho(0)\frac{s^2}{2} + \rho'(0)\frac{s^3}{6})\nu_0 - \rho(0)\theta(0)\frac{s^3}{6}\beta_0 + o(s^3)$

(6) (a) n étant unitaire et Π contenant 0, $d(M,\Pi) = \frac{|\vec{OM}.n|}{||n||} = |\vec{OM}.n| = |xu+yv+zw|$

(b) Donc au voisinage de 0, $d(\gamma(s),\Pi) = |su - \rho^2(0)\frac{s^3}{6}u + \rho(0)\frac{s^2}{2}v + \rho'(0)\frac{s^3}{6}v - \rho(0)\theta(0)\frac{s^3}{6}w + o(s^3)|$. Pour minimiser cette distance on voisinage de 0, il faut que $d(\gamma(s),\Pi) = o(s^n)$ avec n le plus grand possible : on voit qu'on obtient $d(\gamma(s),\Pi) = o(s^2)$ avec $u = v = 0$: on a alors $n = (0,0,\pm 1) = \pm\beta_0$ et Π est donc le plan osculateur.

(7) Si $M = (x,y,z)$, on a $F_\Omega(M) = -2xd - 2xe - 2xf + x^2 + y^2 + z^2$. On injecte les coordonnées de $\gamma(s)$ dans cette égalité, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3 :
$F_\Omega(\gamma(s)) = -2(s - \rho^2(0)\frac{s^3}{6})d - 2(\rho(0)\frac{s^2}{2} + \rho'(0)\frac{s^3}{6})e + 2\theta(0)\frac{s^3}{6}f + s^2 + o(s^3) = -2sd + s^2(1-\rho(0)e) + s^3(d\frac{\rho^2(0)}{3} - e\frac{\rho'(0)}{3} + f\frac{\theta(0)}{3} + o(s^3)$.

(8) $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s)$ implique $d = 0$: cela signifie que la courbe γ et la sphère sont tangentes.
$F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^2)$ signifie que la courbe et la sphère sont osculatrices : en particulier cela implique de plus $e = \frac{1}{\rho_0}$. En particulier la projection du centre Ω sur le plan osculateur est le centre du cercle osculateur : ainsi, cette sphére osculatrice contient le cercle osculateur.

(9) Si $\theta(0) \neq 0$, on obtient
$F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^3) \Leftrightarrow (d = 0$ et $e = \frac{1}{\rho(0)}$ et $f = \frac{\rho'(0)}{\rho(0)^2\theta(0)})$
Le centre de la sphère est donc bien déterminée, son rayon aussi puisqu'elle passe par 0 : son rayon est $\sqrt{e^2+f^2}$, il y a donc bien une unique sphère surosculatrice.

(10) Pour une hélice circulaire : on reprend le paramétrage de la question 4. La courbure est alors constante. Donc en tout point de paramètre s, $f = 0$: le centre de la sphère osculatrice vérifie $\gamma(s)\vec{\Omega}(s) = \frac{1}{\rho(s)}\nu(s)$, c'est donc le centre du cercle osculateur, et le rayon de la sphère osculatrice est donc le rayon du cercle osculateur $\frac{a^2+b^2}{a}$.

(11) Si $\theta(0) = 0$, deux situations peuvent se produire : si $\rho'(0) = 0$, on a $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^3)$ pour toute sphère passant par $\gamma(0)$ de centre $(0, \frac{1}{\rho(0)}, f)$ pour tout f réel : il n'y a donc pas unicité de la sphère osculatrice.
Par contre, si $\rho'(0) \neq 0$, le coefficient d'ordre 3 de $F_\Omega(\gamma(s))$ ne peut pas s'annuler si les coefficients d'ordre 1 et 2 sont nuls : il n'y a donc pas de sphère osculatrice dans ce cas là.