**Université Bordeaux I – 2007/08** **MASTER 1**
**Probabilités** **M.-L. Chabanol**

**Devoir Surveillé**
*Mars 2008 – 3 heures. Aucun document autorisé*

<u>Problème 1</u>. (Application directe du cours)
*Rappels : $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ ssi $\forall k > 0, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ssi $X$ a pour densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbf{R}^+}(x)$.*

1. Énoncer le lemme de Borel-Cantelli.
2. Donner la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$, ainsi que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (la démonstration n'est pas nécessaire).
3. Soit $X_n$ une suite de variables aléatoires suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{\mu}{n}$. Calculer la fonction caractéristique de $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Montrer que $Y_n$ converge en loi et donner sa loi limite.

<u>Problème 2</u>. On s'intéresse à des familles qui auront deux enfants. On suppose qu'à chaque naissance, les parents choisissent le prénom de leur enfant uniformément dans l'un des deux ensembles de prénoms $\Omega_1 = \{\text{prénoms masculins}\}$ et $\Omega_2 = \{\text{prénoms féminins}\}$. On suppose de plus que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (ils n'envisagent pas d'appeler leur enfant Claude ou Dominique, par exemple). Les naissances sont supposées indépendantes, et les sexes équiprobables. Enfin, après chaque naissance, ils rayent le prénom choisi de l'ensemble des prénoms disponibles (de telle sorte que deux enfants d'une même famille n'ont pas le même prénom). Avant leur premier enfant, $Card(\Omega_1) = N$ et $Card(\Omega_2) = M$. On suppose $N \geq 2$ et $M \geq 2$.

1. Soit $p$ un prénom de garçon de $\Omega_1$. Calculer la probabilité que le premier enfant s'appelle $p$.
2. Calculer de même la probabilité que le premier enfant s'appelle $p$ si $p$ est un prénom de fille de $\Omega_2$.
3. Soient $(r, s)$ deux prénoms différents. Calculer la probabilité que le premier enfant s'appelle $r$ et le deuxième s'appelle $s$.
4. On suppose que "Léa" est un prénom de $\Omega_2$. Quelle est la probabilité qu'un enfant s'appelle "Léa" ?
5. Votre voisin a deux enfants. Vous apprenez que l'un d'eux s'appelle Léa. Quelle est la probabilité qu'il ait deux filles ?

<u>Problème 3</u>. *Les deux parties sont indépendantes.*
Soit $(\Omega, \Sigma, P)$ un espace probabilisé fixé et $(X_1, \ldots, X_k, \ldots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles de même loi vérifiant $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. On suppose dans cette partie $p \neq \frac{1}{2}$.
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $P(S_n = 0)$.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} P(S_n = 0)$ converge. (On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.) Quelle est la probabilité que $S_n$ s'annule une infinité de fois ?
2. On suppose à partir de maintenant $p = \frac{1}{2}$.
   (a) Vérifier $\forall t \in \mathbf{R}, E[e^{tX_n}] = \cosh(t)$.
   (b) En déduire $\forall t \in \mathbf{R}, E[e^{tX_n}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. (On pourra par exemple utiliser un développement en série de Taylor des deux membres de l'inégalité.)
   (c) Montrer que pour tous $a > 0, n \geq 1$ et $u > 0$ on a $P(S_n > a) \leq e^{nu^2/2 - ua}$ (on pourra majorer $P(e^{uS_n} > e^{ua})$ en utilisant une inégalité de Markov...).
   (d) En déduire $P(S_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$, puis $P(|S_n| > a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
   (e) Soit $c > 1$. Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour montrer que avec probabilité 1, $S_n \leq c\sqrt{2n \ln n}$ pour tout $n$ sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

<u>Problème 4</u>. On suppose que sur une voie d'autoroute, toutes les voitures ont la même vitesse (qu'on prendra égale à 1), et sont séparées par des distances $L_1, L_2, \dots L_n, \dots$ comptées de l'arrière du véhicule de devant (numéro $n-1$) à l'avant du véhicule de derrière (numéro $n$). On considère que le conducteur de la voiture $j$ a un temps de réaction $R_j$, et que son véhicule a une distance de freinage (avant immobilisation) $D_j$ : ainsi, à partir du moment où le véhicule qui le précède commence à freiner, il parcourt une distance de $R_j + D_j$ avant de s'arrêter. On suppose que les $L_i$ sont toutes distribuées selon une loi de densité $l$ sur $\mathbf{R}^+$, que les $R_j$ suivent toutes une loi de densité $r$ sur $\mathbf{R}^+$, et les $D_j$ suivent une loi de densité $d$ sur $\mathbf{R}^+$. On suppose de plus que toutes ces variables sont indépendantes. On suppose (encore...) que à l'instant 0, le véhicule numéro 0 s'arrête instantanément (donc $D_0 = R_0 = 0$), et on cherche la probabilité qu'il y ait un accident. On considère pour cela qu'il ne peut y avoir d'accident qu'entre un véhicule à l'arrêt et un véhicule en mouvement, et qu'un conducteur qui voit le véhicule qui le précède freiner se mettra aussi à freiner le plus tôt possible (c'est-à-dire après son temps de réaction $R_j$).

1. Montrer que la probabilité pour que le véhicule 1 s'arrête sans collision est
$$\int\int\int_{\{x+y<z\}} r(x)d(y)l(z)dxdydz$$
2. Calculer cette probabilité si les $R_i$ suivent toutes une loi uniforme sur $[r_1, r_2]$, les $D_i$ une loi uniforme sur $[d_1, d_2]$ et les $L_i$ une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
3. On note pour $n \geq 1$, $A_n$ l'événement "Les véhicules de 1 à $n$ se sont arrêtés sans collision", $B_1 = \{R_1 + D_1 < L_1\}$, et $B_n = \{R_n + D_n < L_n + D_{n-1}\}$ si $n > 1$. Justifier $A_n = \cap_{k=1}^n B_k$,
4. Dans le cas où les $D_n$ sont déterministes égaux à $d_0$ (c'est-à-dire $P(D_n = d_0) = 1$), exprimer $P(A_n)$ en fonction de $l$ et $r$. Montrer que s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_\alpha^{+\infty} r(x)dx > 0$ et $\int_0^\alpha l(x)dx > 0$, alors $P(\cap_{k=1}^\infty B_k) = 0$. Que peut-on en déduire sur la probabilité qu'il y ait un accident ? (On suppose qu'il y a une infinité de voitures.)
5. On suppose dans cette question que les $D_n, n \geq 1$ sont déterministes, tous égaux à $d_0$, que les $R_i$ suivent une loi uniforme sur $[r_1, r_2]$ et les $L_i$ suivent une loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Calculer $P(A_n)$.
   (b) Montrer que s'il y a une infinité de voitures, il y aura presque sûrement un accident.
   (c) On note $N$ le numéro du premier véhicule qui rentre dans son voisin de devant (d'après la question précédente, $N$ est presque sûrement fini). Donner la loi de $N$.
   (d) On pose $a = e^{-d_0}$ et $p = 1 - \frac{e^{-r_1} - e^{-r_2}}{r_2 - r_1}$. On note $U = p(N-1)$.
      i. Calculer la fonction caractéristique de $N$.
      ii. Montrer que lorsque $p$ tend vers 0, $U$ converge en loi vers une variable de loi $(1-a)\delta_0 + ae^{-x}1_{\mathbf{R}^+}(x)dx$.
6. Les $D_n$ ne sont plus supposées déterministes. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(D_n > n\epsilon) = 0$. Que peut-on en déduire pour la variable $\frac{D_n}{n}$ ?
7. On suppose que les $R_i$ et les $L_i$ sont intégrables d'espérance respectivement $\rho$ et $\lambda$. On note $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L_i + \frac{D_n}{n}$. Que peut-on dire sur la convergence de la suite de variables aléatoires $Y_n$ ?
8. On dit qu'un véhicule $n$ est en état de risque si $\sum_{i=1}^n R_i + D_n - \sum_{i=1}^n L_i > 0$. On suppose $\rho < \lambda$.
   (a) On note $C_n = \{\sum_{i=1}^n R_i + D_n - \sum_{i=1}^n L_i > 0\}$. Vérifier que $C_n \subset A_n^c$.
   (b) Montrer $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 0$. En déduire que presque sûrement, il existe un véhicule qui n'est pas en état de risque.