# Devoir n$^o$ 1

(à rendre pour le 16/02/2011)

Soit $\mathbf{E}^3$ l'espace euclidien orienté. Dans tout le problème, $\gamma : I \to \mathbf{E}^3$ désigne un arc de classe $\mathcal{C}^2$, bi-régulier et paramétré par l'abscisse curviligne $s$ (en particulier $\gamma''(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$). On suppose que $0 \in I$, que $\gamma(0) = 0$ et on note $(\tau_0, \nu_0, \beta_0)$ le repère de Serret-Frenet de $\gamma$ en $s = 0$. Enfin on note $\rho$ la courbure de $\gamma$.

L'espace $\mathbf{E}^3$ sera muni de la base $(\tau_0, \nu_0, \beta_0)$. Toutes les coordonnées seront données dans cette base.

**Partie I** *(Cercle osculateur)*

**1.** Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par $\gamma(0) = 0$ et tangent à $\gamma$ en ce point. On note $R > 0$ le rayon de $\mathcal{C}$ et $P = (a, b, c)$ son centre.

**1-a.** Établir les relations $a = 0$ et $b^2 + c^2 = R^2$.

**1-b.** Écrire le paramétrage normal $\alpha(s)$ de $\mathcal{C}$ déterminé par $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) = \tau_0$.

**2.** Donner un développement limité à l'ordre 2 de $\gamma(s)$ en $s = 0$ dans la base $(\tau_0, \nu_0, \beta_0)$ [on fera intervenir la courbure $\rho$ de $\gamma$].

**3.** Prouver que le cercle osculateur de $\gamma$ au point $\gamma(0)$ est l'unique cercle $\mathcal{C}$ (vérifiant les hypothèses de la question 1) tel que $\gamma(s) - \alpha(s) = o(s^2)$ quand $s$ tend vers 0.

**4.** Déterminer le lieu des centres de courbure d'une hélice circulaire.

**Partie II** *(Sphère surosculatrice)*

Dans cette partie on suppose de plus que l'arc $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^3$ et on note $\theta$ sa torsion.

**5.** Donner un développement limité à l'ordre 3 de $\gamma(s)$ en $s = 0$ dans la base $(\tau_0, \nu_0, \beta_0)$ [on fera intervenir $\rho, \rho'$ et $\theta$].

**6.** Soit $\Pi$ un plan passant par 0 et soit $n = (u, v, w)$ un vecteur unitaire normal à $\Pi$.

**6-a.** Rappeler l'expression de la distance d'un point $M = (x, y, z) \in \mathbf{E}^3$ au plan $\Pi$ (en fonction des coordonnées de $M$ et de $n$).

**6-b.** Déterminer $n$ pour que la distance de $\gamma(s)$ à $\Pi$ soit la plus petite possible quand $s$ tend vers 0. Quel plan retrouve-t-on ?

Soit $\Omega = (d, e, f) \in \mathbf{E}^3$. Pour $M \in \mathbf{E}^3$, on pose $F_\Omega(M) = ||\Omega - M||^2 - ||\Omega||^2$ ; on note $S_\Omega$ la sphère d'équation $F_\Omega(M) = 0$.

**7.** Donner le développement limité à l'ordre 3 de $F_\Omega(\gamma(s))$ quand $s$ tend vers 0.

**8.** Interpréter géométriquement les conditions $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s)$ et $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^2)$ [on pourra introduire le cercle osculateur de $\gamma$ en $s = 0$, cf. partie I].

**9.** On suppose que $\theta(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe une unique sphère $S_\Omega$, dite *sphère surosculatrice*, telle que $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^3)$ ; donner le centre et le rayon de cette sphère.

**10.** Déterminer la sphère surosculatrice en tout point d'une hélice circulaire.

**11.** Si $\theta(0) = 0$, discuter l'existence et l'unicité d'une sphère $S_\Omega$ telle que $F_\Omega(\gamma(s)) = o(s^3)$.