Estimations L^p d'intégrales oscillantes

J.L. Joly
Université de Bordeaux I

G. Métivier
Université de Rennes I

J. Rauch
University of Michigan

1. Présentation du problème

Dans [JMR 2] [JMR 3], on étudie le comportement d'oscillations semi-linéaires près des caustiques. L'idée essentielle est de représenter la partie principale des oscillations à l'aide d'intégrales oscillantes, comme il est classique de le faire pour les équations linéaires. Typiquement, les intégrales considérées sont de la forme

$$\frac{1}{\varepsilon^d}\int e^{i\,(t\,\lambda(\xi)\,+\,(x-y)\cdot\xi\,+\psi(y))/\varepsilon}\ a(t,y)\,dy\,d\xi\,. \tag{1.1}$$

ψ est une phase initiale, $\lambda(\xi)$ une valeur propre d'un système hyperbolique à coefficient constants. Par exemple, $\lambda(\xi) = \pm|\xi|$ lorsque la partie principale est le d'Alembertien. Le cas des systèmes à coefficients variables conduirait à des intégrales du même type, en remplaçant $t\,\lambda(\xi) + (x-y)\cdot\xi$ par la phase d'un l'opérateur intégral de Fourier. Dans [JMR 3], qui traite d'équation du type

$$\square u \;+\; |\partial_t u|^{p-1}\,\partial_t u \;=\; 0\,, \tag{1.2}$$

un argument crucial est l'obtention d'estimations L^q, uniformes en ε, pour des intégrales (1.1). À ce stade, il est naturel de considérer de façon plus générale des intégrales du type

$$u^\varepsilon(x) \;:=\; \varepsilon^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,\varphi(x,\alpha)/\varepsilon}\ a(x,\alpha)\ d\alpha\,, \tag{1.3}$$

où φ et a sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n$. a est à support compact, φ est réelle et non dégénérée au sens de Hörmander (c.f. [Hö 1]), c'est-à-dire que φ'_α, la différentielle partielle de φ par rapport aux variables α, est de rang maximal sur le support de a :

$$\operatorname{rang} d_{(x,\alpha)}\,\varphi'_\alpha \;=\; n\,. \tag{1.4}$$

On pourrait bien sûr aussi supposer que a est un symbole $a(x,\alpha,\varepsilon)$, c'est-à-dire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n\times[0,\varepsilon_0]$.

La question posée est la suivante :

(Q) *Pour quels $q\in[2,+\infty]$, la famille u^ε est-elle bornée dans L^q ?*

Notons d'abord que la réponse est triviale quand la phase φ n'a pas de point critique en α sur le support de a, $u^\varepsilon = O(\varepsilon^\infty)$, ou quand les points critiques sont non dégénérés, $u^\varepsilon = O(1)$. Par ailleurs, c'est un résultat classique de la théorie des intégrales oscillantes que, sous l'hypothèse (1.4), la famille u^ε est bornée dans L^2.

La question (Q) est locale. On supposera que a est supporté dans un petit voisinage de $\underline{\rho} := (\underline{x},\underline{\alpha})\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n$, tel que

$$\varphi'_\alpha(\underline{\rho}) = 0\,,\quad \det\varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho}) \;=\; 0 \tag{1.5}$$

où $\varphi''_{\alpha\alpha}$ est la matrice Hessienne

$$(1.6) \qquad \varphi''_{\alpha\alpha}(x,\alpha) \ := \ \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_j\,\partial\alpha_k}\,(x,\alpha)\Big)_{1\le j,\,k\le n}.$$

On peut alors préciser la question de la manière suivante :

Étant donné un petit voisinage ω de $\underline{\rho}$, trouver l'exposant maximal q_c tel que pour tout $a \in C_0^\infty(\omega)$, et tout $q < q_c$, la famille u^ε est borné dans L^q.

On cherche à calculer q_c de façon explicite à l'aide d'objets géométriques associés à la phase φ. Cet indice est lié au phénomène de dispartion des oscillations à la caustique par dissipation (cf [JMR 3] et [JMR 1]) : pour une équation dy type (1.2), la partie principale des oscillations est totalement absorbée aux points de la caustique où l'indice critique q_c est inférieur ou égal à $p+1$. Par contre, si $p+1 < q_c$, les oscillations traversent la caustique.

Il faut noter que nos résultats ne découlent pas d'estimations L^p-L^q pour les opérateurs Fourier intégraux. Ces estimations concernent des *opérateurs* du type

$$(1.7) \qquad T^\varepsilon(f)(x) \ := \ \varepsilon^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,\varphi(x,\alpha)/\varepsilon}\; a(x,\alpha)\,f(\alpha)\;d\alpha \ ,$$

et évaluent en fonction de ε, la norme de T^ε opérant de L^p dans L^q. Voir par exemple [St], [So] et leurs réferences. La différence essentielle est que le symbole $a(x,\alpha)$ est C^∞ en α, alors que $a(x,\alpha)f(\alpha)$ ne l'est pas. Par ailleurs, les T^ε ne sont jamais uniformément bornés de L^p dans L^q quand $q > 2$, alors que nous cherchons des estimations uniformes en ε de la norme L^q de u^ε.

D'autres questions concernant les intégrales (1.3) ont été étudieés. Lorsque a ne s'annulle pas au point critique dégénéré $(\underline{x},\underline{\alpha})$, alors u^ε n'est pas uniformément borné au voisinage de $\underline{x}$. La première question est de déterminer l'ordre de grandeur $O(\varepsilon^{-\kappa})$ de u^ε dans L^∞, κ est l'ordre de la caustique (cf [Du] et ses références). On peut aussi se demander sous quelles hypothèses d'annulation de a aux points critiques dégénérés, on récupère les estimations $\|\, u^\varepsilon \,\|_{L^\infty} = O(1)$ (voir [CDMM] et aussi [St]).

2. Exemples

2.1. Considérons la phase

$$(2.1) \qquad \varphi(x,\alpha) \ := \ a(x)\alpha \ - \ \alpha^3 \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

où $a : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, vérifie $a(\underline{x}) = 0$, $da(\underline{x}) \neq 0$ (hypothèse (1.4) autour de $\underline{\alpha} = 0$). Alors (1.3) est une intégrale de type Airy et

$$(2.2) \qquad u^\varepsilon(x) \ = \ O(|a(x)|^{-1/4})$$

L'indice critique est alors $q_c = 4$.

2.2. Plus généralement, si

$$\varphi(x,\alpha) \ := \ a(x)\alpha \ - \ \alpha^{\mu+2} \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, , \tag{2.3}$$

avec $\mu \geq 1$ et a comme ci-dessus, alors

$$u^\varepsilon(x) \ = \ O(|a(x)|^{-\mu/2(\mu+1)}) \, , \tag{2.4}$$

et l'indice critique est alors $q_c = 2 + 2/\mu$.

2.3. Considerons maintenant la phase

$$\varphi(x,\alpha) \ := \ a(x)\alpha \ + \ b(x)\alpha^2 \ - \ \alpha^4 \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, , \tag{2.5}$$

où $a, b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, vérifient $a(\underline{x}) = b(\underline{x}) = 0$ et $da(\underline{x}) \wedge db(\underline{x}) \neq 0$. La caustique associée à la phase (2.1) est de type pli, celle associée à la phase (2.5), de type cusp. Elles sont d'ordre différent (cf [Du]). On pourrait s'attendre à ce la complexité supérieure de la caustique se traduise par une diminution de l'indice critique q_c. *Il est remarquable, que cela ne se produit pas.* Plus généralement, pour toutes les phases

$$\varphi(x,\alpha) \ := \ a(x)\alpha \ + \ b(x)\alpha^2 \ + \ \alpha^3\psi(x,\alpha) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, , \tag{2.6}$$

où ψ est un polynôme en α, et a et b comme en (2.5), *on a le même indice critique* $q_c = 4$. Ceci sera démontré au §5.

2.4. Les exemples ci-dessus, traitent du cas où, après réduction du nombre de variables α, on s'est ramené à $n = 1$ (voir §5). La focalisation sphérique échappe à cette réduction et conduit à des phases du type

$$\varphi(x,\alpha) \ := \ a(x)\cdot\alpha \ + \ b(x)\psi(x,\alpha) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}^n \, , \tag{2.7}$$

où $\det \psi''_{\alpha,\alpha}(\underline{x}), \underline{\alpha}) \neq 0$, $a : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^n$ et $b : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ sont tels que $a(\underline{x}) = 0$, $b(\underline{x}) = 0$ et le rang de (da, db) est $n + 1$, ce qui suppose que $d \geq n + 1$. On a alors

$$u^\varepsilon \ = \ O(|(a,b)|^{-n/2}) \tag{2.8}$$

et $q_c \ = \ 2 \ + \ 2/n$.

Remarque 2.1. Les estimations (2.2) (2.4) ou (2.8) montrent que la famille u^ε n'est pas bornée dans l'espace L^{q_c}. Par contre, elle est bornée dans l'espace L^{q_c}-*faible*, c'est-à-dire l'espace de Lorenz $L^{q_c,\infty}$. On aura le même résultat pour les phases (2.6). Rappelons qu'une fonction mesurable u est dans l'espace de Lorentz $L^{p,\infty}$, ou L^p faible, $p > 0$, lorsque

$$\| \, u \, \|_{p,\infty} \ := \ \Big(\sup_{s>0} \ \big(s^p \ \mathrm{mes}\{x, |u(x)| > s\} \, \big) \Big)^{1/p} < +\infty \, . \tag{2.9}$$

En outre, $L^p_{loc} \subset L^{q,\infty}_{loc}$ pour tout $1 \leq p < q$.

3. Les objets géométriques

L'hypothèse de non dégénérescence (1.4), implique que près de $\underline{\rho}$, l'ensemble des points stationnaires

$$C_\varphi := \{(x,\alpha)\ ;\ \varphi'_\alpha(x,\alpha) = 0\} \tag{3.1}$$

est une variété lisse de dimension d. L'ensemble des points stationnaires dégénérés est

$$\mathcal{S}_\varphi := \{(x,\alpha) \in C_\varphi\ ;\ \det \varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha) = 0\}\,. \tag{3.2}$$

Rappelons que l'objet intrinsèque attaché aux intégrales (1.2) est le germe de variété Lagrangienne

$$\Lambda := \iota(C_\varphi) \subset T^*\mathbb{R}^d\ , \quad \text{avec} \quad \iota\ :\ (x,\alpha) \to (x, \varphi'_x(x,\alpha))\,. \tag{3.3}$$

Rappelons aussi que, d'après (1.4), Λ est une variété lisse et que ι est un difféomorphisme de C_φ sur Λ. Désignant par π la projection $(x,\xi) \to x$,

$$\iota(\mathcal{S}_\Phi) = \mathcal{S} := \{(x,\xi) \in \Lambda\ ;\ \operatorname{rang} d(\pi_{|\Lambda})(x,\xi) < d\}\,. \tag{3.4}$$

En outre $\Delta := \det \varphi''_{\alpha,\alpha|C_\varphi} \approx (\det \pi) \circ \iota_{|C_\varphi}$. La caustique est l'ensemble

$$\mathcal{C} \ :=\ \pi(\mathcal{S}) \ =\ \{x\ ;\ \exists \alpha\,,\ (x,\alpha) \in \mathcal{S}_\varphi\}\,. \tag{3.5}$$

On sait que si φ et φ_1 définissent le même germe de Lagrangienne Λ, alors toute famille (1.3) se représente aussi sous la forme

$$u^\varepsilon(x) \ :=\ \varepsilon^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,\varphi_1(x,\alpha)/\varepsilon}\ a_1(x,\alpha,\varepsilon)\ d\alpha\,. \tag{3.6}$$

(cf [Hö 1], [Hö 2], [Du]). Par ailleurs, on peut opérer un changement de variables $x = \chi(x')$, et ajouter à φ une phase $\psi(x)$ qui ne fait que multiplier u^ε par un facteur $e^{i\psi/\varepsilon}$ de module 1.

Remarque 3.1. Un paramètre important est la dimension ν du noyau de $\varphi''_{\alpha,\alpha}$ aux points de $\mathcal{S}_\varphi$. Noter que $\nu \le d$ et que $d - \nu$ est le rang de $d(\pi_{|\Lambda})$.

$\mathcal{S}_\varphi$ est l'ensemble $\{\Delta = 0\}$ dans C_φ. Dans [JMR 3], une attention particulière est portée au cas où $\mathcal{S}_\varphi$ est une variété lisse de codimension un et où Δ s'annule exactement à un ordre μ sur $\mathcal{S}_\varphi$. Sous certaines hypothèses, on y montre que l'indice critique est $q_c = 2 + 2/\mu$. Ces résultats seront rappelés et généralisés aux paragraphes 5 et 6.

On notera que l'ordre de la caustique $\mathcal{C}$ (cf [Du]) et sa complexité géométrique dépend d'autres paramètres, notamment de l'ordre du contact entre $\mathcal{S}$ et la fibre $\pi^{-1}(\underline{x})$ en $\underline{\rho}$.

Exemple 3.2. Si $d\Delta(\underline{\rho}) \neq 0$, alors $\mathcal{S}_\varphi$ est une variété de codimension un, $\nu = \dim\ker\varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho}) = 1$ et Δ s'annule à l'ordre $\mu = 1$ sur $\mathcal{S}_\varphi$. L'indice critique attendu est $q_c = 4$. C'est la situation rencontrée pour les phases (2.1), (2.5) ou (2.6).

Pour les phases (2.3), $\mathcal{S}_\varphi$ est encore une variété lisse de codimension un, $\nu = 1$ et μ est l'ordre d'annulation de Δ sur $\mathcal{S}_\varphi$.

Pour les phases (2.7), $\mathcal{S}_\varphi$ est une variété lisse de codimension un, $\nu = n$ et Δ s'annule à l'ordre $\mu = n$ sur $\mathcal{S}_\varphi$. La particularité de ces phases est que $\ker d(\pi_{|\Lambda})$ est tangent à $\mathcal{S}_\varphi$ en chaque point de $\mathcal{S}_\varphi$.

Exemple 3.3. Pour les phases de (1.1), de la forme $\Phi = t\lambda(\xi) + (x-y)\xi + \psi(y)$, la variété C_φ est paramétrée par (t, y), et $\mathcal{S}_\varphi$ correspond à l'ensemble des points (t, y) tels que $1/t$ est une valeur propre non nulle de la matrice $\lambda''(d\psi(y))\,\psi''(y)$. En particulier, $\mathcal{S}_\varphi$ est de codimension un, et est lisse dès que la valeur propre considérée est de multiplicité constante. Dans ce cas, ν est la multiplicté géométrique et μ la multiplicité algébrique de la valeur propre. On notera aussi que si ψ'' ou λ'' est semi-définie, positive ou négative, alors les valeurs propres non nulles sont semi-simples, et $\nu = \mu$.

4. Majoration de q_c

Considérons près de $\underline{\rho}$, un germe de phase φ vérifiant (1.4) et (1.5).

Théorème 4.1. *Il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel que si $a \in C_0^\infty(\omega)$ et si la famille (1.3) u^ε est bornée dans L^q, alors la restriction de $\Delta^{1-q/2}\,|a|^q$ à C_φ est intégrable.*

Preuve. On suppose que $q > 2$, sinon il n'y a rien à démontrer. En utilisant le théorème d'équivalence de phase, quitte à opérer un changement de variables et à diminuer ω, on peut supposer que φ est de la forme

$$\varphi(x,\xi) \;=\; x\cdot\xi \;-\; h(\xi)\;, \quad \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{4.1}$$

sur un voisinage $\Omega \times U$ de $(\underline{x}, \underline{\xi})$. Soit $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, $U_1 \subset\subset U$, et $a \in C_0^\infty(\Omega_1 \times U_1)$.

Pour $f \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int f(x)\,|u^\varepsilon(x)|^2\,dx \;=\; \int F(\eta,\xi,\xi+\varepsilon\eta)\; e^{i\,(h(\xi)-h(\xi+\varepsilon\eta))/\varepsilon}\,d\xi\,d\eta\,, \tag{4.2}$$

avec

$$F(\eta,\xi,\xi') \;:=\; \int e^{i\,x\eta} f(x)\,a(x,\xi)\,\overline{a(x,\xi')}\,dx \;=\; O((1+|\eta|)^{-\infty})\,. \tag{4.3}$$

Avec le théorème de la convergence dominée, on en déduit le résultat classique suivant :

$$\int f(x)\, |u^\varepsilon(x)|^2\, dx \quad \to \quad (2\pi)^d \int f(h'(\xi))\, |a(h'(\xi),\xi)|^2 \;\; d\xi\,, \tag{4.4}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Si la suite u^ε est bornée dans L^q, on en déduit que pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\Big| \int f(h'(\xi))\, |a(h'(\xi),\xi)|^2\, d\xi \Big| \;\leq\; C \parallel f \parallel_{L^r(\Omega)}\;, \quad r := q/(q-2)\,. \tag{4.5}$$

Notons λ la mesure image de $|a(h'(\xi),\xi)|^2\, d\xi$ par l'application h'. Le membre de gauche de (4.5) est $\big| \int f(x)\, \lambda(dx) \big|$ et (4.5) implique que

$$\lambda \;=\; \ell(x)\, dx\;, \quad \text{avec} \quad \ell \in L^{r'}(\Omega)\;, \quad r' = q/2\,. \tag{4.6}$$

Soit $\mathcal{S}_1 = \{\xi \in \overline{U_1} \;:\; \Delta(\xi) = 0\}$, où $\Delta := \det h''$. Soit $\mathcal{C}_1 = h'(\mathcal{S}_1) \cap \overline{\Omega_1}$. Pour $x \in \Omega \backslash \mathcal{C}_1$, l'ensemble des antécédants $\xi \in \overline{U}_1$ tels que $h'(\xi) = x$ est fini, et il existe un voisinage G de x et tel que $h'^{-1}(G)$ soit la réunion finie d'ouverts deux à deux disjoints, V_j, tels que h' soit un difféomorphisme de V_j sur G, de Jacobien Δ. On en déduit que sur $\Omega_1 \backslash \mathcal{C}_1$

$$\ell(x) \;=\; \sum_{\xi \in h'^{-1}(\{x\})} \frac{|a(x,\xi)|^2}{|\Delta(\xi)|} \;\geq\; 0\,. \tag{4.7}$$

Par ailleurs, $\mathcal{C}_1$ est de mesure de Lebesgue nulle, par le theorème de Sard. Par suite, (4.7) détermine complètement la mesure $\lambda = \ell(x)dx$. La condition $\ell \in L^{r'}$, implique que

$$\begin{aligned} \int \ell(x)^{r'}\, dx \;&=\; \int \ell(x)^{r'-1}\, \lambda(dx) \\ &=\; \int \ell(h'(\xi))^{r'-1}\, |a(h'(\xi),\xi)|^2\, d\xi \;<\; +\infty\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En dehors de $h'^{-1}(\mathcal{C}_1)$, (4.7) et la relation $r' = q/2$ impliquent que

$$\ell(h'(\xi))^{r'-1}\, |a(h'(\xi),\xi)|^2 \;\geq\; |\Delta(\xi)|^{1-q/2}\, |a(h'(\xi),\xi)|^q\,. \tag{4.9}$$

Par ailleurs, (4.6) implique que $\mathcal{C}_1$ est de λ mesure nulle, donc que $h'^{-1}(\mathcal{C}_1)$ est de mesure nulle pour la mesure $|a(h'(\xi),\xi)|^2\, d\xi$. (4.8) et (4.9) impliquent donc que

$$\int |\Delta(\xi)|^{1-q/2}\, |a(h'(\xi),\xi)|^q\, d\xi \;<\; +\infty \tag{4.10}$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaire 4.2. *Supposons que, au voisinage de $\underline{\rho}$, $\mathcal{S}_\varphi$ est une sous-variété de codimension un et que la restriction de Δ à C_φ s'y annulle exactement à l'ordre μ. Alors, il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel pour $a \in C_0^\infty(\omega)$, vérifiant $a(\underline{\rho}) \neq 0$, la famille* (1.3) *$u^\varepsilon$ n' est pas bornée dans L^q, pour $q \geq 2 + 2/\mu$.*

Remarque 4.3. La preuve du Théorème 3.1 montre que, si $a(\underline{\rho}) \neq 0$, la fonction

$$W(\xi) := \Big(\sum_{\{\eta \,:\, h'(\eta) = h'(\xi)\}} \frac{1}{|\Delta(\eta)|} \Big)^{q/2-1} \geq 0 \,. \tag{4.10}$$

est intégrable au voisinage de $\underline{\xi}$. On utilise ensuite l'inégalité $W(\xi) \geq \Delta(\xi)^{1-q/2}$. C'est une perte d'information, qui pourrait être importante quand le nombre d'antécédents dans (4.7) ou (4.10) n'est pas borné.

5. Estimations L^q, quand $\nu = 1$

La question que pose le Théorème 4.1 est de savoir si la condition $\Delta^{-r} \in L^1(C_\varphi)$ suffit à impliquer que u^ε est bornée dans L^{2+2r}. Il n'est pas clair que ceci soit vrai en toute généralité, comme le suggère la Remarque 4.3. Cependant, les résultats que nous énonçons maintenant vont dans cette direction. Nous savons conclure de façon assez générale lorsque $\ker \varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho})$ est de dimension un, mais uniquement dans des cas très particuliers, qui couvrent néanmoins le cas de la focalisation sphérique, lorsque cette dimension est > 1.

Hypothèse 5.1. *$\varphi(x, \alpha)$ est une phase non dénénérée au voisinage de $\underline{\rho}(\underline{x}, \underline{\eta}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, telle que le noyau de $\varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho})$ est de dimension un. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour presque tout x dans un voisinage de $\underline{x}$, le nombre des points critiques $(x, \alpha) \in C_\varphi$ dans la fibre au dessus de x est inférieur ou égal à N.*

Si φ est réelle analytique, la condition de finitude est automatiquement satisfaite, et il ne reste que la condition $\nu = 1$.

Rappelons que Δ désigne la restriction de la fonction $\det \varphi''_{\alpha,\alpha}$ à C_φ.

Théorème 5.2. *Soit φ une phase qui vérifie l'hypothèse* (4.1). *Si pour un $r > 0$, $\Delta^{-r} \in L^{1,\infty}$ au voisinage de $(\underline{t}, \underline{\eta})$, alors il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel que tel que pour tout symbole $a \in C_0^\infty(\omega)$, la famille d'intégrales oscillantes* (1.3) *est bornée dans l'espace de Lorentz $L^{2+2r,\infty}$.*

Si pour un $r > 0$, $\Delta^{-r} \in L^1$ au voisinage de $(\underline{t}, \underline{\eta})$, alors il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel que tel que pour tout symbole $a \in C_0^\infty(\omega)$, la famille d'intégrales oscillantes (1.3) *est bornée dans L^{2+2r}.*

Corollaire 5.3 *Si φ vérifie l'hypothèse* (4.1), *si $\mathcal{S}_\varphi$ est une variété de codimension un et si Δ s'annule exactement à l'ordre μ sur $\mathcal{S}_\varphi$, il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel que pour tout symbole $a \in C_0^\infty(\omega)$, la famille d'intégrales oscillantes* (1.3) *est bornée dans l'espace de Lorentz $L^{2+2/\mu,\infty}$*

Le Corollaire 4.3 montre que l'indice $2 + 2/\mu$ est optimal. Le Corrolaire 5.3 contient les résultats de [JMR 3] concernant le cas $\nu = 1$.

Remarque 5.4. Le théorème s'applique aux phases

$$\varphi(t, y, \alpha) \;=\; y\,\alpha \;+\; \psi(t, \alpha)\,, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\;, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{5.1}$$

où ψ est un polynôme en α, non constant pour presque tout t. On a alors $\Delta = \psi''_{\alpha,\alpha}(t, \alpha)$. L'ensemble $\mathcal{S}_\varphi$ est l'ensemble $\{\Delta = 0\}$. Aucune propriété de régularité ou de codimension n'est directement imposée à $\mathcal{S}_\varphi$. Bien entendu, la condition $\Delta^{-1} \in L^{r,\infty}$ est une hypothèse indirecte sur $\mathcal{S}_\varphi$.

Preuve du Théorème 5.2.

a) On se ramène au cas où $n = 1$, en appliquant d'abord le Théorème de la phase stationnaire dans $n - 1$ variables α' telles que $\det \varphi''_{\alpha',\alpha'} \neq 0$. On suppose maintenant que $n = 1$.

$\underline{\rho}$ est un point critique dégénéré et la phase est non dégénérée. Il existe donc des coordonnées $x = (t, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, telles que $\partial^2_{y\,\alpha}\varphi(\underline{\rho}) \neq 0$. Par équivalence de phases on peut se ramener au cas où

$$\varphi(x, \alpha) \;:=\; y\,\alpha \;-\; h(t, \alpha)\;, \quad x = (t, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\,. \tag{5.2}$$

(cf [Hö 1] [Hö 2] [Du]). On suppose maintenant que la phase φ est donnée par (5.2) sur $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\underline{t}} \times \mathcal{O}_{\underline{y}} \times \mathcal{I}$, où $\mathcal{O}_{\underline{t}}$ est un voisinage borné de $\underline{t}$, $\mathcal{O}_{\underline{y}}$ est un voisinage borné de $\underline{y} = h'_\alpha(\underline{t}, \underline{\alpha})$ qui contient $h'_\alpha(\mathcal{O}_{\underline{t}} \times \mathcal{I})$ et $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert qui contient $\underline{\alpha}$. Dans ce cas, C_φ est paramétrée par (t, α), sous la forme $y = h'_\alpha(t, \alpha)$. En prenant (t, α) comme coordonnées sur C_φ on a $\Delta(t, \alpha) = h''_{\alpha,\alpha}(t, \alpha)$. $\mathcal{S}_\varphi$ est l'ensemble des (t, α) tels que $\Delta(t, \alpha) = 0$.

Lemme 5.5. *Il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $\varphi'_\alpha(t, y, \alpha) = \lambda$ a plus de $N + 1$ solutions dans $\mathcal{I}$, est négligeable.*

Preuve. Par hypothèse il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}' \subset \mathcal{O}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}'$, l'équation en α, $\varphi'_\alpha(x, \alpha) = y - h'_\alpha(t, \alpha) = 0$, a au plus N racines dans $\mathcal{I}$. Il existe donc un ensemble négligeable $\mathcal{N}_{\underline{t}} \subset \mathcal{O}_{\underline{t}}$ tel que pour $t \in \mathcal{N}_{\underline{t}}$, l'ensemble $\{y : (t, y) \in \mathcal{N}\}$ est négligeable, c'est-à-dire que pour presque tout $y \in \mathcal{O}_{\underline{y}}$, l'équation $h'_\alpha(t, \alpha) = y$ a au plus N racines dans $\mathcal{I}$. Comme $h'_\alpha(\mathcal{O}_{\underline{t}} \times \mathcal{I}) \subset \mathcal{O}_{\underline{y}}$, il revient au même de dire que pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $h'_\alpha(t, \alpha) = \lambda$ a au plus N racines dans $\mathcal{I}$. Le lemme en résulte en choisissant $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\underline{t}} \times \mathcal{O}_{\underline{y}}$.

Dans toute la suite, $a \in C^\infty_0(\mathcal{O} \times \mathcal{I})$.

b) Soit $\delta > 0$ et $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}$. Soit

$$\mathcal{I}(x,\delta) := \{\alpha \in \mathcal{I} \ : \ |\varphi'_\alpha(x,\alpha)| > \delta\,\} \ , \quad \mathcal{J}(x,\delta) := \{\alpha \in \mathcal{I} \ : \ |\varphi'_\alpha(x,\alpha)| < 2\delta\,\}\,.$$

Soit χ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi(\lambda) = 0$ pour $|\lambda| \leq 1$ et $\chi(\lambda) = 1$ pour $|\lambda| \geq 2$. On coupe l'intégrale (1.3) en deux morceaux en introduisant la partition de l'unité $1 = \chi(\varphi'_\alpha/\delta) + (1 - \chi(\varphi'_\alpha/\delta))$ sous le signe d'intégration. La seconde intégrale est supportée dans $\mathcal{J}(x,\delta)$ et se majore par

$$\| \, a \, \|_{L^\infty} \ \mathrm{mes}\mathcal{J}(x,\delta)/\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{5.3}$$

Dans la première, on intègre par parties pour trouver

$$\begin{aligned} i\,\sqrt{\varepsilon}\int e^{i\,\varphi/\varepsilon}\ \partial_\alpha(a\,\chi(\varphi'_\alpha/\delta)/\varphi'_\alpha)\ d\alpha & \\ = \ i\,\sqrt{\varepsilon}\int e^{i\,\varphi/\varepsilon}\ a\ \partial_\alpha(\chi(\varphi'_\alpha/\delta)/\varphi'_\alpha)\ d\alpha\ &+ O(\sqrt{\varepsilon}/\delta)\,. \end{aligned}$$

On remarque que $\partial_\alpha\big(\chi(\varphi'_\alpha/\delta)/\varphi'_\alpha\big) = O(|\varphi''_{\alpha,\alpha}|/(\varphi'_\alpha)^2)$ et est supporté dans $\mathcal{I}(x,\delta)$. D'où la majoration du premier terme en

$$C\ \sqrt{\varepsilon}\ \int_{\mathcal{I}(x,\delta)} \frac{|\varphi''_{\alpha,\alpha}|}{|\varphi'_\alpha|^2}\ d\alpha\ +\ C\sqrt{\varepsilon}/\delta \tag{5.4}$$

On applique à la fonction $1/\varphi'_\alpha$ le lemme suivant.

Lemme 5.6. *Soit f une fonction C^∞ sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}$. On suppose que f est bornée sur O et que pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $f(\alpha) = \lambda$ a au N racines. Alors*

$$\int_O |\, f'(\alpha)\,|\, d\alpha\ \leq\ 2\ N\ \|\, f\,\|_{L^\infty(O)}\,. \tag{5.5}$$

La preuve de ce lemme indépendant est donnée au paragraphe 7. La fonction $1/\varphi'_\alpha$ est majoré par $1/\delta$ sur $\mathcal{I}(x,\delta)$ et pour $x \notin \mathcal{N}$, la propriété sur le nombre de racines est satisfaite d'après le Lemme 5.5..

Avec (5.3) et (5.4), on en déduit que

$$|\,u^\varepsilon(x)\,|\ \leq\ C\ \Big(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} + \frac{\mathrm{mes}\mathcal{J}(x,\delta)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\,. \tag{5.6}$$

avec C indépendant de $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.

c) Pour $x \notin \mathcal{N}$, le Lemme 5.5 permet d'appliquer le Lemme 5.6 à la fonction φ'_α sur l'ouvert $\mathcal{J}(x,\varphi)$. On en déduit que

$$\int_{\mathcal{J}(x,\delta)} |\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha)|\, d\alpha \ \leq\ 2\ N\,\delta\,.$$

L'intégrale est plus grande que

$$\frac{\delta^2}{\varepsilon}\ \mathrm{mes}\big(\{\alpha \in \mathcal{J}(x,\delta)\ :\ |\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha)| \geq \delta^2/\varepsilon\}\big)\,.$$

Le sous ensemble $\{\alpha \in \mathcal{J}(x,\delta)\ :\ |\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha)| \geq \delta^2/\varepsilon\}$ de $\mathcal{J}(x,\delta)$ a donc une mesure inférieure ou égale à $2N\varepsilon/\delta$ et contribue dans (5.6) pour un terme en $O(\sqrt{\varepsilon}/\delta)$. On introduit l'ensemble complémentaire

$$\mathcal{K}(x,\delta,\varepsilon)\ :=\ \ \{\alpha \in \mathcal{I}\ :\ |\varphi'_\alpha(x,\alpha)| \leq 2\delta\ \text{ et }\ |\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha)| \leq \delta^2/\varepsilon\ \}\,. \tag{5.7}$$

Alors, (5.6) et la discussion précédente impliquent que

$$|\,u^\varepsilon(x)\,|\ \leq\ C_1\ \Big(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} + \frac{\mathrm{mes}\,\mathcal{K}(x,\delta,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\,. \tag{5.8}$$

avec C_1 indépendant de $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.

d) Pour $s > 0$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$, on applique (5.8) avec $\delta = \delta_s := \sqrt{\varepsilon}/s$. On en déduit que pour $x \in \mathcal{O}\backslash\mathcal{N}$,

$$|\,u^\varepsilon(x)\,|\ \leq\ C_1\ s\ +\ C_1\ \frac{\mathrm{mes}\,\mathcal{K}(x,\sqrt{\varepsilon}/s,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\,. \tag{5.9}$$

Soit

$$\mathcal{A}(s,\varepsilon)\ :=\ \{x \in \mathcal{O}\ :\ |\,u^\varepsilon(x)\,| \geq 2C_1 s\} \tag{5.10}$$

où C_1 est la constante de (5.8). On tire de (5.9) que pour $x \in \mathcal{A}(s,\varepsilon)\backslash\mathcal{N}$, on a

$$\mathrm{mes}\,\mathcal{K}(x,\sqrt{\varepsilon}/s,\varepsilon)\ \geq\ \sqrt{\varepsilon}\ s\ :=\ \rho_s\,. \tag{5.11}$$

Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{B}(s,\varepsilon)\ :=\ \{(x,\alpha) \in \mathcal{O}\times\mathcal{I}\ :\ |\varphi'_\alpha(x,\alpha)| \leq 2\,\sqrt{\varepsilon}/s\ \text{ et }\ |\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha)| \leq 1/s^2\}\,, \tag{5.12}$$

dont les sections $\mathcal{B}(x,s,\varepsilon) = \{\alpha \in \mathcal{I}\ :\ (x,\alpha) \in \mathcal{B}(s,\varepsilon)\}$ sont les ensembles $\mathcal{K}(x,\sqrt{\varepsilon}/s,\varepsilon)$. En utilisant (5.11) et le fait que $\mathcal{N}$ est négligeable, on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}\mathcal{B}(s,\varepsilon)\ &=\ \int \mathrm{mes}\mathcal{B}(x,s,\varepsilon)dx \\ &\geq\ \int_{\mathcal{A}(s,\varepsilon)} \mathrm{mes}\mathcal{B}(x,s,\varepsilon)dx\ \geq\ \rho_s\ \mathrm{mes}\mathcal{A}(s,\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Comme $\varphi'_\alpha(x,\alpha) = y - h'_\alpha(t,y)$ et $\varphi''_{\alpha,\alpha}(x,\alpha) = -h''_{\alpha,\alpha}(t,\alpha) = -\Delta(t,\alpha)$, on voit immédiatement que

$$\text{(5.14)} \qquad \operatorname{mes}\mathcal{B}(s,\varepsilon) \ \leq\ 4\ \delta_s \ \operatorname{mes}\mathrm{A}(s^2)$$

avec $\mathrm{A}(\sigma) := \{(t,\alpha) \in \mathcal{O}_{\underline{t}} \times \mathcal{I} \ :\ |\Delta(t,\alpha)|^{-1} \geq \sigma\}$. Avec (5.12), on en déduit que

$$\text{(5.15)} \qquad \operatorname{mes}\mathcal{A}(s,\varepsilon) \ \leq\ \frac{4\,\delta_s}{\rho_s} \operatorname{mes}\mathrm{A}(s^2) \ =\ \frac{4}{s^2} \operatorname{mes}\mathrm{A}(s^2)\,.$$

e) L'hypothèse $\Delta^{-1} \in L^{r,\infty}$ implique que $\operatorname{mes}\mathrm{A}(\sigma) \ \leq\ \Gamma\sigma^{-r}$. On en déduit que $\operatorname{mes}\mathcal{A}(s,\varepsilon) \ \leq\ \Gamma \ \ s^{-(2+2r)}$ ce qui implique l'estimation

$$\text{(5.16)} \qquad \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[} \ \| \, u^\varepsilon \, \|_{L^{2+2r,\infty}} \ <\ +\infty\,.$$

De même, (5.15) implique que

$$\begin{aligned} \| \, u^\varepsilon \, \|_{L^{2+2r}} \ &\leq\ C \int_0^{+\infty} s^{1+2r} \ \operatorname{mes}\mathcal{A}(s,\varepsilon)\ ds \\ &\leq 4\ C \int_0^{+\infty} s^{2r-1} \ \operatorname{mes}\mathrm{A}(s^2)\ ds \leq\ C' \| \, \Delta^{-r} \, \|_{L^1(\mathcal{O}_{\underline{t}}\times\mathcal{I})}\,. \end{aligned}$$

6. Estimations L^q quand $\nu = \mu \geq 2$.

Dans ce paragraphe, on présente le résultat de [JMR 3] qui permet de traiter la focalisation d'ondes sphériques (voir la discussion faite pour l'exemple 3.3)

Hypothèse 6.1. *Dans un voisinage ω of $\underline{\rho}$, $\mathcal{S}_\varphi$ est une variété C^∞ de codimension un dans C_φ En tout point $\rho \in \mathcal{S}_\varphi \cap \omega$, le noyau $\varphi''_{\alpha\alpha}(\rho)$ est de dimension constante $\nu \geq 2$ et $\Delta := \det \varphi''_{\alpha,\alpha | C_\varphi}$ s'annule exactement à l'ordre $\mu = \nu$.*

Théorème 6.2. *Soit φ une phase réelle qui vérifie l'Hypothèse 4.2, alors il existe un voisinage ω de $\underline{\rho}$, tel que pour tout symbole $a \in C_0^\infty(\omega)$, la famille d'intégrales oscillantes* (1.3) *est bornée dans l'espace de Lorentz $L^{2+2/\mu,\infty}$.*

On commence par opérer un certain nombre de réductions.

1. *Reduction au cas $n = \nu = \dim\ker\varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho})$.* Il suffit d'appliquer le Théorème de la phase stationnaire dans $n-\nu$ variables α' telles que $\det\varphi''_{\alpha',\alpha'} \neq 0$.

On suppose maintenant que $n = \nu$. On a donc $\varphi''_{\alpha,\alpha}(\underline{\rho}) = 0$. Noter alors que (1.4) nécessite que $d \geq \nu$.

2. *Choix de coordonnées*. L'hypothèse (1.4) implique que par équivalence de phases on peut se ramener au cas où

$$\varphi(x,\alpha) \ := \ y\cdot\alpha \ - \ h(t,\alpha)\ , \quad x=(y,t)\in\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{d-\nu}\,. \tag{6.1}$$

(cf [Hö 1] [Hö 2] [Du]). Dans ce cas, C_φ est paramétrée par (t,α), sous la forme $y = h'_\alpha(t,\alpha)$. En prenant (t,α) comme coordonnées sur C_φ on a $\Delta(t,\alpha) = \det h''_{\alpha,\alpha}(t,\alpha)$.

3. *Modèle* . On suppose φ donnée par (6.1)

LEMME 6.3. *Sous l'Hypothèse* 6.1, *il existe une fonction* C^∞ $g(t)$, *définie près de* $\underline{t}$, *telle que* $g(\underline{t})=0$, $dg(\underline{t})\neq 0$ *et*

$$h''_{\xi\xi}(t,\xi) \ = \ g(t)\,E(t,\xi)\,, \quad \text{avec} \quad \det E(t,\xi)\ \neq\ 0\,. \tag{6.2}$$

Preuve. Dans C_φ paramétré par (t,α), $\mathcal{S}_\varphi$ est donné par une équation $f(t,\alpha)=0$ avec $df\neq 0$ sur $\mathcal{S}_\varphi$. L'hypothèses de rang constant implique que

$$\forall\rho\in\mathcal{S}_\varphi\ , \quad h''_{\alpha,\alpha}(\rho)\ =\ 0\,. \tag{6.3}$$

Comme Δ s'annule exactement à l'ordre $\mu=\nu$ sur $\mathcal{S}_\varphi$, on en déduit que

$$h''_{\alpha,\alpha}(t,\alpha)\ =\ f(t,\alpha)\,E(t,\alpha)\ , \quad \det E(t,\alpha)\ \neq\ 0\,, \tag{6.4}$$

où $E(t,\alpha)$ est une matrice symétrique. En dérivant (6.4), on obtient que

$$h'''_{\alpha\alpha\alpha}(t,\alpha)(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\delta\alpha_3)\ =$$
$$f'_\alpha(t,\alpha)\,(\delta\alpha_3)\,E(t,\alpha)\,(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2)+f(t,\alpha)\,E'_\alpha(t,\alpha)\,(\delta\alpha_3)(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2)\,.$$

Le membre de gauche est symétrique en $(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\delta\alpha_3)$. Donc, quand $f=0$,

$$f'_\alpha(t,\alpha)\,(\delta\alpha_3)\,E(t,\alpha)\,(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2)\ =\ f'_\alpha(t,\alpha)\,(\delta\alpha_1)\,E(t,\alpha)\,(\delta\alpha_2,\delta\alpha_3)\,. \tag{6.5}$$

Comme $\nu\geq 2$, on peut choisir $0\neq\delta\alpha_1$ tel que $f'_\alpha(t,\alpha)(\delta\alpha_1)=0$. Comme $E(t,\alpha)$ est nondégénérée, on peut choisir $\delta\alpha_2$ tel que $E(t,\alpha)\,(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2),\neq 0$. On déduit de (6.5) que $f'_\alpha(t,\alpha)\,(\delta\alpha_3)=0$ pour tout $\delta\alpha_3$, ce qui montre que $d_\alpha f=0$ quand $f=0$. Cela implique que $f(t,\alpha)=g(t)f_1(t,\alpha)$ avec $f_1\neq 0$ et $dg\neq 0$. (6.4) implique alors (6.2).

4. *Preuve du théorème* 6.2. Par changement de variables $(t,y)\mapsto(t,y-h'_\alpha(t,0))$, on se ramène au cas où

$$\varphi(x,\alpha)\ =\ y\cdot\alpha\ -\ g(t)\,\psi(t,\alpha)\ , \quad \text{avec} \quad \det\psi''_{\alpha,\alpha}(\underline{t},\underline{\alpha})\ \neq\ 0\,. \tag{6.6}$$

Pour $|y|\geq C|g(t)|$, la phase n'a pas de points stationnaires dans le support de a, et, pour tout N, $u^\varepsilon = O(\varepsilon^{-\nu/2}(\varepsilon/|y|)^N)$. Lorsque $|y|\leq C|g(t)|$, on applique le théorème de la phase stationnaire avec $|g(t)|/\varepsilon$ comme grand paramètre. On en déduit que

$$|\,u^\varepsilon(x)\,|\ \leq\ C\ (|g(t)|+|y|)^{-\nu/2}\,. \tag{6.7}$$

En restreignant au besoin le support de a, u^ε est à support dans un compact fixe sur lequel $dg\neq 0$. On en déduit que u^ε est bornée dans $L^{2+2/\nu,\infty}$, et le théorème est démontré.

7. Démonstration du Lemme 5.6.

Pour être complet, nous incluons une preuve du Lemme 5.6 que nous replaçons dans un contexte plus général.

LEMME 7.1 *Considérons un ouvert O de $\mathbb{R}^d$ et f une application de classe C^1 de O dans $\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe un entier N tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ l'ensemble des $y \in O$ tels que $f(y) = x$ a au plus N éléments. Alors*

$$\int_O |\det f'(y)|\, dy \;\leq\; N \,\mathrm{mes}\, f(O)\,. \tag{7.1}$$

Preuve. On peut se resteindre à majorer les intégrales sur les ouverts relativement compacts dans O. On suppose donc que O est borné, que f est de classe C^1 sur un voisinage O' de $\overline{O}$ et que presque tout x a au plus N antécédants dans O'. On note $S = \{u \in \overline{O} \;:\; \det f'(y) = 0\}$. S et $f(S)$ sont compacts et d'après le théorème de Sard, $f(S)$ est de mesure nulle.

Pour tout $x \notin f(S)$, l'ensemble des $y \in O'$ tels que $f(y) = x$ est constitué de points isolés. Il y en a donc un nombre fini dans $\overline{O}$. Notons les $(y_1, \ldots, y_n)$. Il existe un voisinage ω de x et des voisinages ouverts disjoints $U_j \subset O'$ de y_j, tels que f est un difféomorphisme de chaque U_j sur ω. Il en résulte d'abord que $n \leq N$. Par compacité, on voit que si $\omega' \subset \omega$ est assez petit, $f^{-1}(\omega') \cap \overline{O} \subset \cup U_j$. Pour chaque j, et pour tout ouvert $A \subset \omega'$ on a

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(A)\cap O\cap U_j} |\det f'(y)|\, dy \;&=\; \mathrm{mes}\, f\big(f^{-1}(A) \cap f(O \cap U_j)\big) \\ &\leq \mathrm{mes}\, A \cap f(O)\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

D'où,

$$\int_{f^{-1}(A)\cap O} |\det f'(y)|\, dy \;\leq\; N \;\; \mathrm{mes}\, A \cap f(O)\,. \tag{7.3}$$

Notons λ la mesure image de $\det f'(y)\, dy$ par l'application f, de O dans $\mathbb{R}^d$. La formule (7.3) implique que tout point $x \notin f(S)$ a un voisinage sur lequel λ est une mesure de densite $\ell \leq N$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On en déduit que la restriction de λ au complémentaire de $f(S)$ est $\ell(x)dx$ avec $\ell(x) \leq N$ et évidemment $\ell(x) = 0$ en dehors de $f(O)$.

Comme f est un difféomorphisme local en dehors de S et que $f(S)$ est de mesure nulle, on vérifie que $f^{-1}(f(S))\backslash S$ est de mesure nulle. Finalement, comme $\det f' = 0$ sur S, on a

$$\begin{aligned} \int_O |\det f'(y)|\, dy \;&=\; \int_{O\backslash f^{-1}(f(S))} |\det f'(y)|\, dy \\ &= \lambda(\mathbb{R}^d \backslash f(S)) \;=\; \int \ell(x)\, dx \;\leq\; N \;\mathrm{mes} f(O). \end{aligned} \tag{7.4}$$

References

[CDMM] M. Cowling, S. Disney, G. Mauceri and D. Müller, Damping oscilllatory integrals,, Invent. Math., 101, 1990, 237-260.

[Du] J.J. Duistermaat, Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities, Comm. Pure Appl. Math. 27,1974, 207-281.

[DH] J.J. Duistermaat and L. Hörmander, Fourier integral operators II, Acta. Math., 128, 1972, 183-269.

[Hö 1] L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta. Math., 127, 1971, 79-183.

[Hö 2] L. Hörmander, *The Analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1991.

[JMR 1] J.-L. Joly, G. Metivier and J. Rauch, Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations, Trans. Amer. Math. Soc., 347, 10, 1995, 3921-3969.

[JMR 2] J.-L. Joly, G. Metivier and J. Rauch, Nonlinear oscillations beyond caustics, Comm. Pure Appl. Math., to appear.

[JMR 3] J.-L. Joly, G. Metivier and J. Rauch, L^p estimates for oscillatory integrals and caustics for disipative semilinear equations, preprint.

[Lu] D. Ludwig, Uniform asymptotic expansions at a caustic, Comm. Pure Appl. Math., 13, 1966, 85-114.

[Ste] E. M. Stein, *Harmonic analysis, real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.

[So] C. D. Sogge, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge Tracts in Mathematics, 105, Cambridge University Press, 1993