Limite incompressible des équations d'Euler non isentropiques

Guy Métivier, Université de Rennes I
Steven Schochet, Tel Aviv University

1 Introduction

Dans cet exposé on s'intéresse au comportement lorsque le nombre de Mach tend vers 0, des solutions du système des équations d'Euler de la dynamique des fluides compressibles

$$\begin{cases} \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot u = 0\,, \\ \rho\,(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = 0\,, \\ \partial_t S + u\cdot\nabla S = 0\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

où ρ est la densité, p la pression, u la vitesse et S l'entropie. Ces variables sont reliées par une équation d'état $\rho = R(p,S)$. On suppose toujours que $1/c^2 = \partial R/\partial p > 0$, c étant la vitesse du son. Par exemple, pour les gaz parfaits, $\rho = p^{1/\gamma}e^{-S/\gamma}$. Le nombre de Mach est le rapport u/c, qu'on suppose uniformément petit, d'ordre ε. On pose $u = \varepsilon v$ et on met les échelles de temps et d'espace en accord avec ce choix soit en changeant les longueurs en $y = x/\varepsilon$, soit en changeant le temps en $s = \varepsilon t$. En appelant (p,v,S) les inconnues et (t,x) les nouvelles variables, les équations s'écrivent

$$\begin{cases} A\partial_t p + v\cdot\nabla p + \mathrm{div} v = 0\,, \\ \rho\,(\partial_t v + v\cdot\nabla v) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\nabla p = 0\,, \\ \partial_t S + v\cdot\nabla S = 0\,, \end{cases}$$

avec $A = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial p}$. On symétrise ces équations en posant $p = \underline{p} + \varepsilon p_1$ où $\underline{p}$ est une constante. Il est agréable d'introduire q tel que $p = \underline{p}e^{\varepsilon q}$. Les équations s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{cases} a(\partial_t q + v\cdot\nabla q) + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div} v = 0\,, \\ r\,(\partial_t v + v\cdot\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla q = 0\,, \\ \partial_t S + v\cdot\nabla S = 0\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $a = \mathcal{A}(S,\varepsilon q)$ et $r = \mathcal{R}(S,\varepsilon q)$ sont des fonctions régulières strictement positives données.

On s'intéresse ici aux solutions *régulières* de (1.2). On envisage deux problèmes :

P1 : l'existence des solutions sur un domaine indépendant de ε,

P2 : le comportement des solutions lorsque ε tend vers zéro. En particulier, on veut les comparer aux solutions du système incompressible

$$\begin{cases} r\,(\partial_t v + v\cdot\nabla v) + \nabla\pi = 0\,, & \mathrm{div} v = 0\,, \\ \partial_t S + v\cdot\nabla S = 0\,, & r = \mathcal{R}(S,0) \end{cases} \tag{1.3}$$

On se limite ici à considérer les équations sur un domaine $\mathbb{D}$ qui est soit l'espace entier $\mathbb{R}^d$, soit un tore $\mathbb{T}^d$. Des extensions sont possibles.

L'existence de solutions régulières de (1.2) sur un domaine indépendant de ε, pour des familles de données initiales uniformément bornées dans $H^s(\mathbb{D})$, $s > 1 + d/2$, est connue dans le cas isentropique (S constant) (cf [KM1] [KM2]) et dans le cas de *données initiales préparées*, c'est-à-dire telles que $\operatorname{div} v(0) = O(\varepsilon)$ et $\nabla q = O(\varepsilon)$ (cf [Sch1])

La convergence des solutions de (1.2) vers les solutions de (1.3) est connue dans $\mathbb{R}^d$ dans le cas isentropique (cf [KM1] [KM2] lorsque les données sont préparées et [Asa] [Uka] [Iso1] [Iso2] [Iso3] dans le cas général où apparait une couche initiale). Le cas des données initiales préparées pour les équations avec entropie est traité dans [Sch1]. Le cas isentropique sur $\mathbb{D} = \mathbb{T}^d$ est un champ d'application de l'optique géométrique faiblement nonlinéaire où l'on peut trouver des développement asymptotiques des solutions ([JMR], [Sch3]).

Le but du travail présenté ici est d'étudier le cas de données initiales générales pour le système avec entropie. Il faut noter que l'introduction de l'entropie change profondément la nature du problème. En effet elle rend le problème *instable* (cf paragraphe 2). Il est donc tout-à-fait remarquable qu'on puisse néanmoins obtenir des résultats d'existence de solutions fortes et de convergence. On présentera d'abord les résultats d'existence dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{T}^d$ et de convergence dans $\mathbb{R}^d$ démontrés dans [MS]. On s'intéressera ensuite à l'étude du comportement des solutions périodiques. Ce problème pose énormément de questions nouvelles et on donnera quelques éléments de réponse. En particulier, il n'est pas toujours vrai, même en dimension un, que les solutions de (1.2) convergent vers des solutions de (1.3). Le problème se pose en fait comme un problème de moyennisation (comportement ergodique) pour un système dynamique en dimension infinie. Par analogie avec l'étude des systèmes en dimension finie, on montrera que l'on est amené naturellement à se restreindre à l'étude du comportement *générique* des solutions.

2 Existence

L'instabilité créée par l'entropie se voit sur problème modèle suivant :

$$\begin{cases} \sigma\partial_t u + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x u = 0\,, \\ \partial_t \sigma + a(u)\partial_x\sigma = 0\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

On ne s'intéresse qu'à des solutions $\sigma > 0$. Si $S = \underline{\sigma}$ est constant, la solution est $\underline{u}(t,x) = \underline{u}(0, x - t/(\varepsilon\underline{\sigma}))$ et on voit que des variations de taille δ de $\underline{\sigma}$ produisent des variations de taille 1 pour u en temps $t = O(\varepsilon/\delta)$. De façon équivalente, le linéarisé de (2.1) autour de $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ est

$$\begin{cases} \underline{\sigma}\partial_t \dot{u} + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x \dot{v} + \dot{\sigma}\partial_t\underline{u} = \dot{f}\,, \\ \partial_t\dot{\sigma} + a(\underline{u})\partial_x\dot{\sigma} = \dot{g}\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

et comme $\partial_t\underline{u}$ est d'ordre $1/\varepsilon$, il n'y a pas d'estimations uniformes en ε pour les solutions de (2.2). Néanmoins, on a des estimations uniformes en norme H^s_x pour les solutions de l'équation non linéaire (2.1). Pour des données initiales bornés dans H^s, on montre qu'il existe T et M tels que

$$\forall t \in [0,T], \quad \|u(t)\|_{H^s} + \|\sigma(t)\|_{H^s} + \|\partial_t \sigma(t)\|_{H^{s-1}} \leq M . \tag{2.3}$$

La deuxiène équation permet d'estimer $\|\sigma\|_{H^s}$ et $\|\partial_t\sigma\|_{H^{s-1}}$ par $\|u\|_{H^s}$. On estime $\|u\|_{H^s}$ par $\|\sigma\|_{H^s}$ et $\|\partial_t\sigma\|_{H^{s-1}}$ en commutant la première équation non pas aux dérivations ∂_x^k, qui font apparaître le linéarisé (2.2), mais aux opérateurs $D^k := (\frac{1}{\sigma}\partial_x)^k$ ce qui élimine le mauvais terme $\dot\sigma\partial_t u$, le commutateur $[\partial_t, D^k]$ étant contrôlé par l'estimation de $\partial_t\sigma$.

Une analyse analogue est valable pour le système (1.2). Le rôle de u est tenu par les composantes acoustiques $(q, \mathrm{div} v)$ et le rôle de σ par les composantes $(S, \mathrm{rot}(rv))$.

Théorème 2.1. *Soit $s > 1 + d/2$ et $M_0 > 0$. Il existe $T > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour toute famille de données initiales $(v^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0)) \in H^s(\mathbb{D})$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, vérifiant*

$$\big\|(v^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0))\big\|_{H^s(\mathbb{D})} \leq M_0 , \tag{2.4}$$

le problème de Cauchy pour (1.2) a une unique solution $(v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon) \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{D}))$. Deplus, il existe M tel que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ on a

$$\begin{aligned} &\big\|(v^\varepsilon(t), q^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t))\big\|_{H^s(\mathbb{D})} \leq M , \quad \big\|\partial_t S^\varepsilon(t)\big\|_{H^{s-1}(\mathbb{D})} \leq M , \\ &\big\|\partial_t \,\mathrm{rot}\big\{r^\varepsilon(t) v^\rho(t)\big\}\big\|_{H^{s-2}(\mathbb{D})} \leq M . \end{aligned} \tag{2.5}$$

On renvoie à [MS] pour une démonstration détaillée.

3 Convergence dans $\mathbb{R}^d$

Pour le modèle (2.1), l'analyse des caractéristiques montre que le "support" de u^ε part à l'infini à une vitesse $\approx 1/\varepsilon$ et donc que u^ε converge fortement vers 0 sur tout compact. On a le même phénomène pour les solutions de (1.2).

Théorème 3.1. *Soit $(v^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0))$ une famille de données initiales dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ vérifiant (2.4) et convergeant vers (v^*, q^*, S^*) dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ lorsque ε tend vers 0. On suppose en outre qu'à l'infini*

$$|S^*(x)| = O\big(|x|^{-1-\delta}\big) , \quad |\nabla S^*(x)| = O\big(|x|^{-2-\delta}\big) \tag{3.1}$$

où $\delta > 0$. Alors les solutions $(v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon)$ données par le Théorème 2.1 convergent fortement dans $L^2([0,T]; H^{s'}_{loc}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $s' < s$, vers $(v, S, 0) \in C^0([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, où (v, S) l'unique solution du problème incompressible (1.3) avec données initiales (w^*, S^*) où w^* est l'unique solution de

$$\mathrm{div} v(0) = 0 , \quad \mathrm{rot}(r^* w^*) = \mathrm{rot}(r^*, v^*) , \quad \text{avec} \quad r^* = \mathcal{R}(S^*, 0) . \tag{3.2}$$

Pour la preuve, on utilise d'abord les estimations uniformes (2.5) qui impliquent qu'on peut extraire une sous suite, toujours notée ε, tendant vers 0 et telle que pour tout $s' < s$,

$$
\begin{array}{lll}
S^\varepsilon \to S & \text{dans} & C^0(H^{s'}_{loc}) \\
(q^\varepsilon, v^\varepsilon) \rightharpoonup (q, v) & \text{dans} & L^\infty([0,T], H^s) \text{ faible}* \\
\operatorname{curl}(r^\varepsilon v^\varepsilon) \to \operatorname{curl}(r^0 v) & \text{dans} & C^0(H^{s'-1}_{loc})
\end{array}
\tag{3.3}
$$

En multipliant les deux premières équations de (1.2) par ε et en passant à la limite au sens des distributions, on obtient

$$
\nabla q = 0\,, \quad \operatorname{div} v = 0\,. \tag{3.4}
$$

Comme $q \in L^\infty(H^s)$, on a $q = 0$. En passant à la limite faible, on obtient aussi

$$
\partial_t S + v \nabla S = 0\,, \tag{3.5}
$$

L'étape principale consiste à montrer la convergence forte des composantes acoustiques.

Proposition 3.2. *$(q^\varepsilon, v^\varepsilon)$ converge vers $(0, v)$ dans $L^2([0,T], H^{s'}_{loc}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $s' < s$.*

Les estimations H^s donnent la compacité locale en x. Il s'agit de contrôler les oscillations en t. L'idée est que les composantes acoustiques $(q^\varepsilon, \operatorname{div} v^\varepsilon)$ vérifient une équation d'ondes

$$
\varepsilon^2 \partial_t (a^\varepsilon \partial_t \phi^\varepsilon) - \operatorname{div}\big(\frac{1}{r^\varepsilon} \nabla \phi^\varepsilon\big) = \varepsilon f^\varepsilon\,. \tag{3.6}
$$

Ces ondes se propagent à vitesse $\approx \frac{1}{\varepsilon}$, et elles partent donc à l'infini après une couche initiale mince. De façon précise, la proposition découle du résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit ϕ^ε une suite bornée dans $C^0([0,T], H^2(\mathbb{R}^d))$ telle que f^ε est borné dans $C^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^d))$. Alors, ϕ^ε converge fortement vers zéro dans $L^2([0,T], L^2_{loc}(\mathbb{R}^d))$.*

Lorsque les coefficients a^ε et r^ε sont constants, ce qui est le cas pour les équations d'Euler isentropiques, la décroissance vers zéro de l'énergie locale se déduit des estimations de Strichartz ou de Morawetz. Pour des équations à coefficients qui ne dépendent que de x et convergent vers des constantes à l'infini comme dans (3.1). En termes spectraux, la convergence vers zéro de l'énergie locale résulte dans ce cas du fait que l'opérateur

$$
\frac{1}{a} \operatorname{div}\big(\frac{1}{r} \nabla\big) \tag{3.7}
$$

n'a pas de valeurs propres (cf par exemple [LP], [RS]).

Pour (3.6), la difficulté est que les coefficients dépendent du temps et de ε. Néanmoins, par (3.3), les coefficients a^ε et r^ε convergent fortement dans $C^0([0,T], H^s_{loc})$.

Pour étudier les oscillations en temps de ϕ^ε, on introduit les mesures microlocales de défaut de la suite ϕ^ε, considérée comme suite bornée dans $L^2([0,T]$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ (cf [Gér]). Une manière d'introduire cette notion est de considérer une transformation en paquets d'ondes en temps

$$
\Phi^\varepsilon(t, \tau, x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{3/4}} \int e^{i(t-s)\tau/\varepsilon - (t-s)^2)/\varepsilon} \chi_\varepsilon(s)\, \phi^\varepsilon(s, x)\, ds\,. \tag{3.8}
$$

où $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty([0,T])$ vaut 1 sur $[\sqrt{\varepsilon}, T-\sqrt{\varepsilon}]$ et a des dérivées $\partial_t^j \chi_\varepsilon$ en $O(\varepsilon^{-j/2})$. Quitte à extraire une sous-suite, on montre (cf [Gér]) qu'il existe une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^2$ et une application $M \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_+, \mu)$, où $\mathcal{L}_+$ est l'ensemble des opérateurs à trace, autoadjoints et positifs ou nuls dans $\mathcal{H}$, tels que pour toute application A, continue à support compact dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans l'espace des opérateurs compacts dans $\mathcal{H}$, on a

$$\int (A\Phi^\varepsilon)(t,\tau,x)\, \overline{\Phi^\varepsilon(t,\tau,x)}\, dt d\tau dx \longrightarrow \int \mathrm{tr}(A(t,\tau)M(t,\tau))\, \mu(dt, d\tau)\,. \tag{3.9}$$

On peut aussi voir que le noyau $M(t,\tau; x,y)$ de $M(t,\tau)$ est la transformé de Fourier en s des corrélations données par les limites faibles de

$$\phi^\varepsilon(t+\varepsilon s/2, x)\, \overline{\phi^\varepsilon(t-\varepsilon s/2, y)}$$

Une propriété générale des mesures microlocales de défaut est qu'elles sont annulées par le symbole principal de l'équation. Ici, en désignant par $a(t)$ et $r(t)$ les opérateurs de multiplication par $a(t,\cdot) = \mathcal{A}(S(t,\cdot),0)$ et $r(t,\cdot) = \mathcal{R}(S(t,\cdot),0)$, on obtient

$$a(t)\tau^2 M(t,\tau) \,+ \mathrm{div}(\frac{1}{r(t)}\nabla)\, M(t,\tau) \,=\, 0\,, \quad \mu \text{ p.p}\,. \tag{3.10}$$

Suivant [RS] [Hör], on a

Proposition 3.4. *Si a et b vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} &a(x) \geq c\,, \quad |a(x) - \underline{a}| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}\,, \quad |\nabla a(x)| \leq C(1+|x|)^{-2-\delta}\,,\\ &b(x) \geq c\,, \quad |b(x) - \underline{b}| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}\,, \quad |\nabla b(x)| \leq C(1+|x|)^{-2-\delta}\,, \end{aligned}$$

où c, C, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des constantes strictement positives, alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, le noyau de $a\tau^2 + \mathrm{div}(b\nabla)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ est réduit à $\{0\}$.

Les conditions (3.1) sont propagées par l'équation de transport (3.5) et les coefficients $a(t)$ et $1/r(t)$ vérifient les hypothèses de la proposition. On tire de (3.10) que $M = 0$. Cela implique que pour tout $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la suite $\int \phi^\varepsilon(t,x)\, h(x)\, dx$ converge fortement vers 0 dans $L^2([0,T])$. Cela donne la compacité en t. Comme la suite ϕ^ε est bornée dans $L^\infty(H^2)$, on a déjà la compacité locale en x et la Proposition 3.3 suit.

4 Le cas périodique

Revenons au problème modèle (2.1) dans le cas périodique. Il n'y a plus décroissance locale. Au contraire on observe un phénomène de moyennisation. Pour des données initiales convergeant fortement vers (u^*, σ^*), la solution σ^ε converge fortement vers la solution de

$$\partial_t \sigma + a^h \partial_x \sigma = 0\,, \quad \sigma(0) = \sigma^*\,,$$

où la valeur homogénéïsée a^h est donnée par

$$a^h = \frac{\int a(u^*(x))\sigma^*(x)\, dx}{\int \sigma^*(x)\, dx}\,.$$

De plus, u^ε converge faiblement vers

$$u^{inc} = \frac{\int u^*(x)\sigma^*(x)\,dx}{\int \sigma^*(x)\,dx}\,.$$

L'analogue de (1.3) donnerait une vitesse $a^{inc} = a(u^{inc})$ différente en général de la vitesse homogénéïsée a^h. Ce phénomène d'homogénéïsation n'a rien d'exceptionnel, mais il montre qu'il n'y pas pas de raison pour que les limites des équations faiblement compressibles (1.2) vérifient les équations incompressibles (1.3).

On se donne une famille de données initiales $(v^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0))$ dans $H^s(\mathbb{T}^d)$ qui vérifient (2.4) et convergent vers (v^*, q^*, S^*) dans $H^s(\mathbb{T}^d)$ lorsque ε tend vers 0. On note $(v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon)$ les solutions données par le Théorème 2.1. Les estimations uniformes (2.5) sont satisfaites et, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que pour tout $s' < s$,

$$\begin{array}{lll} S^\varepsilon \to S & \text{dans} & C^0(H^{s'}) \\ (q^\varepsilon, v^\varepsilon) \rightharpoonup (q, v) & \text{dans} & L^\infty([0,T], H^s) \text{ faible}* \\ \mathrm{curl}(r^\varepsilon v^\varepsilon) \to \mathrm{curl}(r^0 v) & \text{dans} & C^0(H^{s'-1}) \end{array} \tag{4.1}$$

On a encore

$$\nabla q = 0\,, \quad \mathrm{div} v = 0\,, \tag{4.2}$$

$$\partial_t S + v\nabla S = 0\,. \tag{4.3}$$

Pour passer à la limite dans l'équation des vitesses, on décompose v^ε en composante incompressible et composante acoustique :

$$v^\varepsilon = v_0^\varepsilon + \frac{1}{r^\varepsilon}\nabla h^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \mathrm{div} v_0^\varepsilon = 0\,. \tag{4.4}$$

On note que l'opérateur $\{\mathrm{div}(r^{-1}\nabla)\}^{-1}$ est bien défini sur les fonctions de moyenne nulle et la famille h^ε est bornée dans $C^0([0,T]; H^{s+1}(\mathbb{T}^d))$. En outre, (4.1) implique que

$$v_0^\varepsilon \to v \quad \text{dans} \quad C^0([0,T], H^{s'})\,, \quad s' < s\,. \tag{4.5}$$

L'équation (1.2) implique que $\nabla(\varepsilon\partial_t h^\varepsilon + q^\varepsilon) = O(\varepsilon)$ et

$$0 = \mathrm{rot}\Big(r^\varepsilon(\partial_t + v^\varepsilon\nabla)v^\varepsilon\Big) \;=\; \mathrm{rot}\Big((\partial_t + v^\varepsilon\nabla)(r^\varepsilon v^\varepsilon) \;-\; \varepsilon\, b^\varepsilon\,(\partial_t q^\varepsilon + v^\varepsilon\nabla q^\varepsilon)v^\varepsilon\Big)\,,$$

avec $b^\varepsilon = \mathcal{B}(S, \varepsilon q)$, et $\mathcal{B} := \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p}$. Les coefficients r^ε et b^ε et les termes quadratiques en v_0^ε convergent fortement. Les termes bilinéaires en v_0^ε et ∇h^ε convergent faiblement vers 0. On en tire que

$$\mathrm{rot}\Big((\partial_t + v\nabla)(rv) \;+\; \mathcal{E}\Big) \;=\; 0\,,$$

où $r = \mathcal{R}_0(S)$, $a = \mathcal{A}_0(S)$, $b = \mathcal{B}_0(S) := \mathcal{B}(S, 0)$ et

$$\begin{cases} \mathcal{E} := -\dfrac{b}{2r}\,\nabla\kappa^{(1)} + \dfrac{1}{2r}\nabla\kappa^{(2)}\,, \\ \kappa^{(1)} := \lim|\varepsilon\partial_t h^\varepsilon|^2 \quad \text{et} \quad \kappa^{(2)} := \lim|\nabla h^\varepsilon|^2\,. \end{cases}$$

En introduisant une pression π et en utilisant (4.5), on écrit l'équation sous la forme

$$r\,(\partial_t v + v\cdot\nabla v) \,+\, \mathcal{E} \,+\, \nabla\pi \,=\, 0\,, \quad \mathrm{div} v = 0\,. \tag{4.6}$$

Les données initiales se déduisent des convergences fortes

$$S(0) = S^*\,, \quad v(0) = w^* \tag{4.7}$$

où w^* est l'unique solution de $\mathrm{div} w^* = 0$, $\mathrm{rot}(r^* w^*) = \mathrm{rot}(r^* v^*)$ avec $r^* = \mathcal{R}(S^*, 0)$.

Dans le cas isentropique S et donc r, a and b sont constant et $\mathcal{E} = \nabla\pi'$. Dans ce cas, (4.6) est équivalent à (1.3). Mais dans le cas général, $\mathcal{E}$ n'est pas un gradient et on a besoin d'une équation supplémentaire pour clore le système (4.3) (4.6).

On peut considérer (1.2) comme un système dynamique à deux échelles de temps :

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u = \ A(S)u + \varepsilon\, Q(S)(u,u) \\ \partial_t S = F(S)u\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

où $u = (v, q)$ et $A(S)$ est un opérateur linéaire à spectre purement imaginaire, $F(S)u$ un terme linéaire en u et $Q(S)(u, u)$ un terme quadratique en u. Le comportement asymptotique des solution dépend de phénomènes de moyennisation dans l'échelle de temps rapide t/ε. Dans un premier temps, on peut s'intéresser aux systèmes (4.8) en dimension finie, en comptant sur les estimations uniformes (2.5) qui assurent la compacité en x, pour étendre les résultats à la dimension infinie. Toute une littérature est consacrée à ce type de problème (voir par exemple [Ano] [Nei] [LM]), en particulier pour des systèmes

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t\varphi = \omega(I) + \varepsilon g(I,\varphi)\,, & \varphi(0) = \varphi^*\,, \\ \partial_t I = f(I,\varphi)\,, & I(0) = I^*\,, \end{cases} \tag{4.9}$$

posés dans les variables actions-angles (I, φ) du système $\varepsilon\partial_t\varphi = \omega(I)\,,\ \partial_t I = 0$. Ici, φ prend ses valeurs dans un tore $\mathbb{T}^m$. On compare la solution $(I^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ de (4.9) à la solution de

$$\partial_t I = \langle f\rangle(I) := \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{T}^m)}\int_{\mathbb{T}^m} f(I,\varphi)d\varphi\,, \quad I(0) = I^*\,. \tag{4.10}$$

Dans ce contexte, sous des hypothèses génériques de non résonace, on montre que *pour presque toute donnée initiale* (I^*, φ^*)*,* I^ε *converge vers la solution de* (4.10).

Dans cet esprit, on peut voir (4.8) comme une perturbation de

$$\varepsilon\partial_t u \,=\, A(S)u\,, \quad \partial_t S = 0\,, \tag{4.11}$$

dont les solution sont S constant et $u = e^{tA(S)/\varepsilon}u_0$. On en déduit les variables “actions-angles” naturelles. Supposant pour simplifier que A est antisymétrique, les actions sont $I_0 = \Pi_0 u$, $I_j = |(u, \phi_{j,S})|$, où l'on note $\Pi_0(S)$ le projecteur spectral sur $\ker A(S)$ et $\phi_{j,S}$ les vecteurs propres de $A(S)$ associés aux valeurs propres non nulles. Les angles sont $\varphi_j = \arg(u, \phi_{j,S})$. Ces variables ne sont pas définies globalement et peuvent être très singulières au voisinage des points où la multiplicité des valeurs propres de $A(S)$ change. En particulier, la réduction de systèmes (4.8) à la forme (4.9) ne peut être faite qu'au voisinage de points ou le long de trajectoires où le spectre de A est de multiplicité constante. Dans ce cas, l'évolution de $u^\varepsilon(t)$ est asymptotiquement diagonlisée dans la résolution spectrale de $A(S(t))$ (voir les théorèmes adiabatiques pour (4.11) avec S dépendant du temps, cf par exempe [Kat]). Par ailleurs, il est connu que le croisement de valeurs propres est la source de difficultés considérables. Pour l' équation

$$\varepsilon \partial_t u^\varepsilon = A(S^\varepsilon(t)) u^\varepsilon$$

avec $S^\varepsilon \to S$, lorsque deux valeurs propres de $A(S(t))$ se croisent en t_0, la limite de $|u^\varepsilon|^2$ peut dépendre non seulement de S mais aussi de la manière dont S^ε approche S (voir les formules de Landau-Zener [Hag] [Joy]). Il se peut même que la limite dépende du choix de sous-suites ε tendant vers zéro. Cela semble indiquer que si le spectre de l'opérateur d'onde (3.7) ne garde pas une multiplicité constante, le terme $\mathcal{E}$ de (4.6) n'est pas uniqement déterminé par les limites (v, S) et donc qu'il n'y a pas de système clos d'équations pour $(v, S, \mathcal{E})$.

La première question est donc de savoir si le spectre de A reste de multiplicité constante au voisinage d'une trajectoire *générique* de (4.8). On fait alors la remarque suivante :

Remarque 4.1. *Dans l'ensemble des matrices antisymétriques de rang donné, le sous ensemble des matrices qui possèdent au moins une valeur propre non nulle multiple est de codimension deux.*

Dans cet ordre d'idée, on montre que l'hypothèse suivante est vérifiée pour des approximation de dimension finie (1.2) par troncature des séries de Fourier.

Hypothèse 4.2. *Dans l'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes les matrices $A(S)$ la dimension de* $\ker A(S)$ *est constante et le sous-ensemble $\mathcal{A}_0$ des matrices qui possèdent au moins une valeur propre non nulle multiple et de codimension deux.*

Sous cette hypothèse on peut espérer que les trajectoires génériques évitent $\mathcal{A}_0$ et en déduire des théorèmes de convergence pour presque toute donnée initiale. On précise cette idée au paragraphe suivant et on verra ensuite un début d'application à l'étude de (1.2).

5 Modèles en dimension finie

Considérons l'équation (1.2) sur le domaine $\mathbb{D} = [0, L_1] \times \ldots \times [0, L_d]$ avec des conditions aux limites périodiques. On suppose ici que le coefficient $\mathcal{A}$ est constant, comme dans le cas des gaz parfaits. Pour simplifier, on suppose en outre que $\mathcal{R}$ de dépend que de S et on prend $\sigma = 1/r$ comme inconnue à la place de S. On note $\mathbb{E}_n$ l'espace des polynômes trigonométriques

$$\sum_{\sup|\alpha_j| \leq n} u_\alpha e^{i\tilde{\alpha}x}, \quad \text{avec} \quad u_{-\alpha} = \overline{u_\alpha},$$

où les indices α sont dans $\mathbb{Z}^d$ et $\tilde{\alpha} = (2\pi\alpha_1/L_1, \ldots, 2\pi\alpha/L_d)$. On note $\mathbb{P}_n$ la projection orthogonale dans L^2 sur $\mathbb{E}_n$. On considère alors l'approximation suivante de (1.2)

$$\begin{cases} \partial_t q + \mathbb{P}_n(v\nabla q) + \dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t v + \mathbb{P}_n(v\nabla v) + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}_n(\sigma\nabla q) = 0, \\ \partial_t \sigma + \mathbb{P}_m(v\nabla\sigma) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Cet exemple conduit à s'intéresser plus généralement aux systèmes de la forme (4.8) où $S \mapsto A(S)$ est C^∞ de $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ dans l'espace des matrices réelles $N \times N$, F est une matrice

$n \times N$, C^∞ en $S \in \mathcal{O}$ et $Q(S;\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, C^∞ en S. Pour garantir l'existence des solutions, on suppose que le système est suffisamment conservatif.

Hypothèse 5.1. *Il existe une matrice $\Sigma(S)$ définie positive et C^∞ en $S \in \mathcal{O}$, telle que $\Sigma(S)A(S)$ est antisymétrique. De plus,* $\ker A(S)$ *est de dimension constante.*

On note $\Phi^\varepsilon(t, S_0, u_0)$ la solution of (4.8) issue de (S_0, u_0) à $t = 0$. On a

Proposition 5.2. *Soit $\mathcal{B}$ une boule fermée contenue dans $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N$. Il existe $T > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et une boule fermée $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$, contenue $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N$, telle que le flot $\Phi^\varepsilon(t)$ est défini pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $t \in [0, T]$, de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.*

Dans la suite, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $T > 0$ sont fixés. On introduit aussi des boules fermées $\mathcal{B}_u \subset \mathbb{R}^N$ and $\mathcal{B}_s$ in $\mathcal{O}$ telles que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}_s \times \mathcal{B}_u$.

L'hypothèse 5.1 implique que $\lambda_0 = 0$ est une valeur propre de $A(S)$ de multiplicitité constante κ. On note $\Pi_0(S)$ le projecteur spectral sur $\ker A(S)$. Les valeurs propres non nulles de $A(S)$ sont purement imaginaires et deux à deux conjuguées. On les note $\{i\lambda_j(S)\}_{1 \le |j| \le N'}$, avec $N' = (N - \kappa)/2$. Elles sont répétées selon leur multiplicité et rangées en ordre croissant. En particulier, $\lambda_j > 0$ pour $j > 0$ et $\lambda_{-j} = -\lambda_j$.

Hypothèse 5.3. *i) A et F sont des fonctions analytiques réelles sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ est connexe.*

ii) L'ensemble E des $S \in \mathbb{R}^n$ tel que $A(S)$ a au moins une valeur propre non nulle multiple, qui est un ensemble analytique d'après i), est de codimension au moins 2.

iii) Pour tout triplet d'entiers strictement positifs (j, k, l), la fonction $\lambda_j - \lambda_k - \lambda_k$ qui est réelle analytique sur $\Omega := \mathcal{O} \backslash E$, n'est pas identiquement nulle.

La principale motivation pour l'introduction de ces hypothèses vient du résultat suivant.

Théorème 5.4. *On suppose que $m \ge 2n$ et que les réels L_j^{-4} et $L_j^{-2} L_k^{-2}$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors le système* (5.1) *vérifie les Hypothèses* 5.1 *et* 5.3..

Les restrictions ne sont probablement que techniques, mais l'analyse du spectre de $A(S)$ est assez délicate en général. Dans l'Hypothèse 5.3, le point crucial est *ii*). C'est lui qui permet de montrer que sur les trajectoires génériques les valeurs propres non nulles $\lambda_j(S(t))$ restent simples. La condition de non résonance *iii*) est l'analogue exacte de la condition de non dégénérescence utilisée dans [Ano] [Nei] (cf [LM]). On notera toutefois que s'il y avait une résonance $\lambda_j - \lambda_k - \lambda_l \equiv 0$, il suffirait de l'inclure dans la description du système moyenné, comme on le fait d'habitude en optique géométrique (cf le cas isentropique [Sch3] et [JMR]).

Soit $(u^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t))$une famille de solutions de (4.8) de données initiales $(u^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0)) \in \mathcal{B}$ convergeant vers (u^*, S^*). Alors $\partial_t S^\varepsilon$ et $\partial_t \Pi_0(S^\varepsilon) u^\varepsilon$ sont bornés. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que

$$S^\varepsilon \to S \quad \text{et} \quad u_0^\varepsilon := \Pi_0(S^\varepsilon) u^\varepsilon \to u_0 = \Pi_0(S) u_0 \quad \text{dans } C^0([0, T]) \,. \tag{5.2}$$

De plus, $u^\varepsilon - u_0^\varepsilon$ converge faiblement vers 0 et

$$\partial_t S = F(S) u_0. \tag{5.3}$$

On introduit la terminologie suivante. On rappelle que Ω est l'ensemble des S tels que $\lambda_j(S(t)) \neq \lambda_k(S(t))$ pour tous les indices non nuls $j \neq k$. Pour j, k, l non nuls et $S \in \Omega$, on note $\Lambda_{j,k,l}(S) = \lambda_j(S) - \lambda_k(S) - \lambda_l(S)$.

Définition 5.5. *On dit que S est générique si pour tout $t \in [0,T]$, $S(t) \in \Omega$ et si la condition $\Lambda_{j,k,l}(S(t)) = 0$ implique que $\partial_t \Lambda_{j,k,l}(S(t)) \neq 0$.*

On commence par supposer que la limite S de S^ε est générique pour obtenir des équations moyennées. On montre ensuite que pour presque toutes données initiale ces équations ont une unique solution qui est générique. On en conclut que pour presque tout (u^*, S^*), la convergence (5.2) a lieu et que les limites vérifient les équations moyennées.

Étape 1. On suppose que la limite S dans (5.2) est générique.

Pour $S \in \Omega$, on note $\phi_{k,S}$ les vecteurs propres de $A(S)$ associés aux valeurs propres $\lambda_k(S)$ pour $k \neq 0$, normalisés par la condition

$$(\!(\Sigma\phi_k\,,\,\phi_j)\!) = \delta_{j,k}\,,$$

où $(\!(\cdot,\cdot)\!)$ désigne le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^N$. On a aussi $\phi_{-k} = \overline{\phi}_k$.

Pour ε assez petit, les valeurs propres $\lambda_k(S^\varepsilon(t))$ sont simples et on peut écrire

$$u^\varepsilon = u_0^\varepsilon + \sum_{0<|j|\le N'} e^{i\varphi_j^\varepsilon(t)/\varepsilon}\,\alpha_j^\varepsilon(t)\,\phi_{j,S^\varepsilon(t)}\,,\quad \varphi_j^\varepsilon(t) := \int_0^t \lambda_j(S^\varepsilon(s))\,ds\,, \tag{5.4}$$

avec

$$\alpha_j(t) \;=\; e^{-i\varphi_j^\varepsilon(t)/\varepsilon}\big(\!\big(\Sigma(S^\varepsilon(t))u^\varepsilon(t)\,,\,\phi_{j,S^\varepsilon(t)}\big)\!\big)\,. \tag{5.5}$$

Comme $S^\varepsilon \to S$, les $\lambda_j(S^\varepsilon)$ convergent uniformément et donc les phases φ_j^ε convergent dans C^1. Le choix des phases élimine les termes en ε^{-1} dans l'expression de $\partial_t\alpha_j^\varepsilon$ et

$$\partial_t\alpha_j^\varepsilon = \sum_{k,l} e^{i(\varphi_k^\varepsilon+\varphi_l^\varepsilon-\varphi_j^\varepsilon)/\varepsilon}\,\Gamma_{k,l}^j(S^\varepsilon)(\alpha_k^\varepsilon,\alpha_l^\varepsilon) \;=\; O(1) \tag{5.6}$$

où l'on convient que $\varphi_0^\varepsilon = 0$, $\alpha_0^\varepsilon = u_0^\varepsilon$. Les $\Gamma_{k,l}^j$ sont des expressions bilinéaires. Quitte à extraire une nouvelle sous suite, on peut supposer que les α_j^ε convergent uniformément sur $[0,T]$. On note α_j la limite de α_j^ε. Ceci permet de passer à la limite faible dans (5.6).

Pour $j = 0$, comme $\partial_t(\varphi_k + \varphi_l) \neq 0$, sauf pour $l = -k$, on obtient une équation

$$\partial_t u_0 = \Gamma_{0,0}^0(S)(u_0,u_0) \;+\sum_{j=1}^{N'}|\alpha_j|^2\,\gamma_j(S)\,,\quad u_0 = \Pi_0(S)u_0 \tag{5.7}$$

avec des coefficents $\Gamma_{0,0}^0$ et γ_j qu'on ne précise pas ici.

Pour $j \neq 0$, la condition de non résonance implique que $\partial_t(\varphi_k + \varphi_l - \varphi_j) \neq 0$ presque partout, sauf pour $l = 0$ ou $k = 0$. On en déduit une équation de la forme

$$\partial_t|\alpha_j|^2 \;=\; \beta_j(S,u_0)|\alpha_j|^2\,. \tag{5.8}$$

Étape 2. Étude du système moyenné (4.3) (5.7) (5.8).

Les inconnues sont (S, u_0, I) avec $I = (I_1, \dots, I_{N'})$ et $I_j = |\alpha_j|^2$. On écrit le système moyenné sous la forme abrégée

$$\partial_t(S,u_0,I) = \mathcal{X}(S,u_0,I)\,. \tag{5.9}$$

Il est posé sur la variété

$$\mathcal{M} := \{(S,u,I) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \ : \ u = \Pi_0(S)u\}$$

lisse, puisque $\Pi_0(S)$ a un rang constant. Le flux $\mathcal{X}(S,u,I)$ est défini et régulier sur l'ouvert

$$\mathcal{M}_r := \{(S,u,a) \in \mathcal{M} \ : \ S \in \Omega\} .$$

Il devient singulier quand S s'approche de l'ensemble E. Cependant, la forme des équations montre que la divergence de $\mathcal{X}$, dans toute carte locale de $\mathcal{M}$, est bornée. Cela implique que pour tout ensemble borné $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}$, il existe C tel que le flot Φ défini par $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{M}_r$ vérifie pour tout $\mathcal{U}$ tel que $\Phi(t)$ soit défini sur $\mathcal{U}$

$$\frac{1}{C}\,\mathrm{mes}\,(\mathcal{U}\cap\mathcal{K}) \ \le\ \mathrm{mes}\,(\Phi(t,\mathcal{U})\cap\mathcal{K}) \ \le\ C\,\mathrm{mes}\,(\mathcal{U}\cap\mathcal{K})\,. \tag{5.10}$$

Les données initiales pour (5.9) sont

$$S(0) = S^*\,, \quad u_0(0) = w^*\,, \quad I_j(0) = I^*\,, \tag{5.11}$$

avec

$$w^* = \Pi(S^*)u^*\,, \quad I_j^* = \big|\big(\!\big(\Sigma(S^*)u^*\,,\,\phi_j(S^*)\big)\!\big)\big|^2\,.$$

On note $\mathcal{B}^\flat$ l'ensemble des données initiales (5.11) qui correspondent aux données initiales de (4.8) dans $\mathcal{B}$ (cf Proposition 5.2).

Théorème 5.6. *Sous les Hypothèses* 5.1 *et* 5.3, *il existe* T' *et un ensemble négligeable* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}\cap\mathcal{B}^\flat$ *tel que pour toute donnée initiale* $(S(0),u_0(0),I(0)) \in (\mathcal{M}_r\cap\mathcal{B}^\flat)\backslash\mathcal{N}$, *le système* (5.9) *a une unique solution* (S,u_0,I) *dans* $C^1([0,T'];\mathcal{M}_r)$ *et* $S(t)$ *est générique.*

Le point important est que T' est uniforme et indépendant de la distance de $S(0)$ à l'ensemble singulier $\mathcal{E}$. Pour chaque donnée initiale dans $\mathcal{B}^\flat\backslash\mathcal{N}$, la distance de $S(t)$ à E est minorée par une nombre strictement positif, mais il n'y a aucun contôle de cette borne.

Pour donner une idée de la démonstration, considérons le cas d'un système

$$\partial_t u = \mathcal{X}(u) \tag{5.12}$$

avec $\mathcal{X}$ défini de $\mathbb{R}^n\backslash E$ dans $\mathbb{R}^n$, borné par K, et à divergence bornée. La solution $u(t) = \Phi(t,u(0)$ est définie tant que la distance $\mathrm{dist}(u(t),E)$ reste strictement positive. Pour $\delta > 0$ on note E_δ l'ensemble des u tels que la distance $\mathrm{dist}(u,E) \le \delta$. On divise $[0,T]$ en intervalles $[t_j,t_{j+1}]$ de longueur δ/K. Comme les solutions sont uniformément Lipschiztiennes, l'ensemble N_δ des données initiales telles $\inf \mathrm{dist}(u(t),E) \le \delta$ est contenu dans la réunion des $\Phi(t_j)^{-1}(E_{2\delta})$. L'hypothèse sur la divergence implique que la mesure de Lebesque est quasi-invariante et donc

$$\mathrm{mes}(N_\delta\cap\mathcal{B}) \le \frac{C}{\delta}\mathrm{mes}(E_{2\delta}\cap\widetilde{\mathcal{B}})\,.$$

On en déduit que $N = \bigcap N_\delta$ est de mesure nulle, pourvu que $\mathrm{mes}(E_\delta\cap\widetilde{\mathcal{B}}) = o(\delta)$. On conclut par le lemme suivant

Lemme 5.7. *Si* E *est un ensemble analytique de codimension au moins deux dans* $\mathbb{R}^n$, *alors pour tout compact* $\mathcal{K}$, $\mathrm{mes}(E_\delta\cap\mathcal{K}) = O(\delta^2)$.

Étape 3. Convergence pour des données initiales génériques.

Revenons aux données initiales $(S^\varepsilon(0), u^\varepsilon(0)) \in \mathcal{B}$, qui convergent vers (S^*, u^*). On note $(S^*, w^*, I^*) \in \mathcal{B}^\flat$ les données initiales (5.11) associées. Suivant (5.5), on note $I_j^\varepsilon = |\alpha_j^\varepsilon|^2$.

Théorème 5.8. *Si $(S^*, w^*, I^*) \in (\mathcal{M}_r \cap \mathcal{B}^\flat) \backslash \mathcal{N}$ alors $(S^\varepsilon, u_0^\varepsilon, I^\varepsilon)$ converge dans $C^0([0, T'])$ vers l'unique solution (S, u_0, I) du système moyenné* (5.9) (5.11).

On compare la limite S de S^ε à la fonction $\widetilde{S}$ donnée par la solution de (5.9) (5.11). Tant que $S = \widetilde{S}$, l'étape 1 donne la convergence souhaitée. De plus, si $S(t_0) = \widetilde{S}(t_0)$, alors on montre que S est encore générique sur un intervalle $[t_0, t_1]$. On a donc la convergence aussi cet intervalle, et par unicité des solutions de (5.9) (5.11), $S = S^*$.

6 Les équations limites non résonantes pour Euler

On reprend ici la première étape de l'analyse faite en dimension finie. L'analogue de l'opérateur $A(S)$ est le système

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a}\mathrm{div} \\ \frac{1}{r}\nabla & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a = \mathcal{A}(S, 0)$ et $r = \mathcal{R}(S, 0)$. Le noyau est constant. L'analyse spectrale équivaut à celle de l'opérateur d'onde

$$W_S\,\phi := -\frac{1}{a}\,\mathrm{div}\big(\frac{1}{r}\nabla\phi\big)\,. \tag{6.1}$$

W_S est autoadjoint dans $L^2(\mathbb{D}, adx)$. On note $0 = \mu_{0,S} < \mu_{1,S} \le \mu_{2,S} \le \dots$ ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité et $\lambda_{j,S} = \sqrt{\mu_{j,S}}$. On note aussi $\phi_{j,S}$ une base de fonction propres, orthonormale dans $L^2(\mathbb{D}, adx)$.

Définition 6.1. *On dit que $S \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{D}))$ satisfait la condition (G) lorsque que*

i) pour tout $t \in [0, T]$ et tout $j > 0$, $\mu_{j,S(t)}$ est simple,

ii) pour tout triplet (j, k, l) d'entiers strictement positifs, $\lambda_{j,S(t)} \neq \lambda_{k,S(t)} + \lambda_{l,S(t)}$ presque partout sur $[0, T]$.

On considère une famille de données initiales $(v^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0), S^\varepsilon(0))$ dans $\mathbb{H}^s(\mathbb{D})$, vérifiant (2.4) et convergeant vers (v^*, q^*, S^*). Après extraction d'une sous-suite, on suppose que les solutions $(v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon)$ de (1.2) vérifient les estimations (2.5) et les convergences (4.1).

Théorème 6.2 (Équations limites non résonantes). *Si la limite S vérifie la condition (G) alors (v, S) vérifient* (4.3) (4.6) (4.7) *avec*

$$\mathcal{E} = -\frac{b}{r}\,\nabla\mathcal{K}^{(1)} + \frac{1}{r}\nabla\mathcal{K}^{(2)}\,, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{K}^{(1)} := \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j\,\lambda_{j,S(t)}\,(\phi_{j,S(t)}(x))^2\,, \quad \mathcal{K}^{(2)} := \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma_j}{\lambda_{j,S(t)}}\,|\nabla\phi_{j,S(t)}(x)|^2 \tag{6.3}$$

où $a = \mathcal{A}(S, 0)$, $r = \mathcal{R}(S, 0)$, $b = \mathcal{B}(S, 0)$ et les σ_j sont des constantes déterminées par les conditions initiales

$$\sigma_j = \frac{1}{\lambda_{j,S^*}}\Big(\int a^*(x)\,q^*(x)\,\phi_{j,S^*}(x)dx\Big)^2 + \frac{1}{\lambda_{j,S^*}^3}\Big(\int \mathrm{div}v^*(x)\,\phi_{j,S^*}(x)dx\Big)^2 \tag{6.4}$$

avec $a^* = \mathcal{A}(S^*, 0)$.

On notera que les $\mathcal{K}^{(i)}$ et des σ_j ne dépendent pas du choix de la base $\phi_{j,S}$, puisque n'interviennent que des carrés.

Problèmes ouverts. La poursuite de l'analyse, dans les lignes esquissées en dimension finie, se heurte à des difficultés sérieuses, sauf en dimension $d = 1$.

a) Une étude des propriétés génériques du spectre d'opérateurs du second ordre est faite dans [Uhl]. Pour les opérateurs W_S, on peut montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ des $S \in H^s(\mathbb{D})$ tels que le spectre de W_S est simple, est un G_δ dense. Il est raisonnable de penser que son complémentaire est de codimension deux (dans un sens à préciser).

b) Le système moyenné (4.3) (4.6) (6.2) est posé sur $\mathcal{G}$, qui n'est pas un ouvert. De plus, en dimension infinie on ne dispose pas de mesure quasi-invariante comme en (5.10). La résolubilité du système moyenné et la généricité de la condition (G) restent donc à prouver.

c) On pourrait "approcher" le système (1.2) par les systèmes (5.1), en s'appuyant sur les estimations uniformes (2.5) et la convergence uniforme de séries de Fourier. Mais l'instabilité du système ne permet pas de contôler la répercussion des troncatures des séries de Fourier dans l'analyse des spectres et des résonances.

Pour terminer, montrons comment l'analyse se poursuit en dimension $d = 1$, lorsque $\mathbb{D} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Dans ce cas, l'incompressibilité de la limite v signifie que $\partial_x v = 0$, donc que $v(t,x) = \underline{v}(t)$ est constant en x. L'équation (4.3) $(\partial_t + \underline{v}\partial_x)S = 0$, implique que

$$S(t,x) \;= S^*(x - \chi(t))\,, \tag{6.5}$$

où $d\chi/dt = \underline{v}$ avec $\chi(0) = 0$. Notons $\mathcal{T}(t)$ l'opérateur de translation $(\mathcal{T}(t)\phi)(x) = \phi(x - \chi(t))$. Alors (6.5) implique que

$$W_{S(t)} = \mathcal{T}(t) W_{S^*} (\mathcal{T}(t))^{-1} \tag{6.6}$$

et donc les valeurs propres $\lambda_{j,S(t)}$ sont indépendantes du temps. On en déduit donc :

Proposition 6.3. *En dimension $d = 1$, si le spectre de W_{S^*} est simple et non résonant, alors la limite $S(t)$ vérifie la condition (G) et le Théorème 6.2 s'applique.*

L'invariance (6.6) implique que $\phi_{j,S(t)}(x) = \phi_{j,S^*}(x - \chi(t))$. On a donc aussi $\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{E}^*(x - \chi(t))$. On en déduit que

$$\langle r^* \rangle \partial_t \underline{v} + \langle \mathcal{E}^* \rangle \;=\; 0\,.$$

où $\langle u \rangle = \frac{1}{L}\int_{\mathbb{D}} u(x)dx$. On en tire que

$$\underline{v}(t) \;=\; w^* \,-\, t\,\frac{\langle \mathcal{E}^* \rangle}{\langle r^* \rangle}\,, \quad \chi(t) \;=\; tw^* \,-\, \frac{t^2}{2}\,\frac{\langle \mathcal{E}^* \rangle}{\langle r^* \rangle}\,. \tag{6.7}$$

En dimension 1, la décomposition (4.4) se lit

$$v = v_0 + \frac{1}{r}\partial_x h \quad \text{avec} \quad \partial_x \frac{1}{r\partial_x} h = \partial_x v\,.$$

On en tire que

$$w^* = \frac{\langle r^* v^* \rangle}{\langle r^* \rangle}\,. \tag{6.8}$$

et

$$
(6.9)\qquad
\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}^* \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j \lambda_j}{4L} \int_{\mathbb{D}} \Big(\partial_x (\frac{b^*}{r^*})\, (\phi_{j,S^*})^2 \; - \; \frac{1}{\lambda_j^2}\, \partial_x (\frac{1}{r^*})\, (\partial_x \phi_{j,S^*})^2 \Big)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j \lambda_j}{4L} \int_{\mathbb{D}} \big(\partial_x (\frac{b^*}{r^*} - a^*) \big)\, (\phi_{j,S^*})^2 \; dx
\end{aligned}
$$

les $\sigma_j(0)$ étant donnés par (6.4). L'égalité des dux membres de droite s'obtient en dérivant l'équation des fonctions propres. Les formules ci-dessus, montrent que les limites (S, v) sont explicitement et uniquement déterminées par les limites (v^*, q^*, S^*) des données initiales. En particulier, la famille entière $(v_0^\varepsilon, S^\varepsilon)$ converge vers (v, S).

Remarque 6.4. Dans le cas des équations d'Euler (1.1), la mise à l'échelle conduit à des équations (1.2) où $\mathcal{A} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}$. On a alors $\mathcal{B} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} = \mathcal{R}\, \mathcal{A}$. et le coefficient b/r dans (6.9) est égal à a. Dans ce cas, on trouve que $\langle \mathcal{E}^* \rangle = 0$. L'équation limite est donc bien la version 1-D de (1.3). On pourrait espérer une preuve directe.

Cependant, pour une fonction $\mathcal{A}$ générale, les coefficients de σ_j dans (6.9) ne s'annulent pas et la valeur de $\langle \mathcal{E}^* \rangle$ dépend bien de la résolution spectrale de W_{S^*}.

Pour terminer, on remarque que les données initiales pour lesquelles la Proposition 6.3 s'applique sont génériques.

Proposition 6.5. *Supposons que les fonctions strictement positives $\mathcal{R}_0(S) = \mathcal{R}(S, 0)$ et $\mathcal{A}_0(S) = \mathcal{A}(S, 0)$ vérifient*

$$
\forall \sigma \in \mathbb{R} : \quad \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0\,, \quad \mathcal{A}_0(\sigma) - \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial S}(\sigma) \neq 0\,.
$$

Alors, pour tout $s \geq 2$, il existe un G_δ dense $\mathcal{G} \subset H^s(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ tel que pour tout $S \in \mathcal{G}$ le spectre de W_S est simple et pour tout triplet (j, k, l) d'entiers strictement positifs, $\lambda_{j,S} \neq \lambda_{k,S} + \lambda_{l,S}$.

Références

[Ano] Anosov, *Oscillations in systems of O.D.E. with rapidly oscillating solutions.* Izvestia Akad.Nauk SSSR Mathematics, 24 (1960), 721–742.

[Asa] K. Asano, *On the incompressible limit of the compressible Euler equation.* Japan J. Appl. Math. 4 (1987), 455–488.

[Gér] P. Gérard, *Microlocal defect measures.* Comm. Partial Diff. Equ., 16 (1991) 1761–1794.

[Hag] G.Hagedorn, *Proof of the Landau-Zener Formula in an Adiabatic Limit with Small Eigenvalue Gap.* Comm. in Math. Phys., 136 (1991), 433–449.

[Hör] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag, 1983.

[Igu] T. Iguchi, *The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation in R^n_+.* Math. Methods Appl. Sci. 20 (1997), 945–958.

[Iso1] H. Isozaki, *Wave operators and the incompressible limit of the compressible Euler equation.* Comm. Math. Phys. 110 (1987), 519–524.

[Iso2] H. Isozaki, *Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain.* J. Reine Angew. Math. 381 (1987), 1–36.

[Iso3] H, Isozaki, *Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. II. Bodies in a uniform flow.* Osaka J. Math. 26 (1989), 399–410.

[JMR] J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics.* Ann.Scient.E.N.S Paris, 28 (1995), 51–113.

[Joy] Joye, *Proof of the Landau-Zener Formula.* Asymptotic Analysis, 9 (1994), 209–258.

[Kat] T.Kato, Perturbation Theory for Linear Operators. Springer Verlag, 1980.

[KM1] S. Klainerman et A. Majda, *Singular perturbations of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids.* Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981) 481–524.

[KM2] S. Klainerman et A. Majda, *Compressible and incompressible fluids.* Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982) 629–653.

[LP] P.Lax et R.Phillips, Scattering Theory. Pure and Applied Mathematics 26, Academic Press, 1989.

[LM] Lochack et Meunier, Multiphase Averaging for Classical Systems. Applied Math. Sciences 72, Springer Verlag, 1988.

[MS] G.Métivier et S.Schochet, *The incompressible Limit of the Nonisentropic Euler Equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., à paraître.

[Nei] Neischadt, *Averaging in multi-frequency systems.* Doklady Akad. Nauk SSSR Mechanics, 226 (1975) 314–317, Soviet Phys. Doklady, 21 (1975) 492–494.

[RS] M. Reed et B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, New York, Academic Press.

[Sch1] S. Schochet, *The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit.* Commun. Math. Phys. 104 (1986), 49–75.

[Sch2] S. Schochet, *Asymptotics for symmetric hyperbolic systems with a large parameter.* J. Diff. Eq. 75 (1988), 1–27.

[Sch3] S. Schochet, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs.* J. Differential Equations 114 (1994), 476–512.

[Uhl] K.Uhlenbeck, *Generic Properties of Eigenfunctions.* Amer.J. Maths., 98 (1176), pp 1059-1078.

[Uka] S. Ukai, *The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation.* J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986), 323–331.