Solutions globales du système de Maxwell dans un milieu ferromagnétique*

Jean-Luc JOLY
MAB, Université de Bordeaux I
33405 Talence, FRANCE

Guy METIVIER
IRMAR, Université de Rennes I
35042 Rennes, FRANCE

Jeffrey RAUCH
Department of Mathematics, University of Michigan
Ann Arbor 48109 MI, USA

1. Introduction

Soit (cf [JV1] et ses références)

$$F(m,h) := \frac{\gamma}{1+\alpha^2}\big(h\wedge m + \frac{\alpha}{|m|}(m\wedge(h\wedge m))\big) \quad , \quad h,m\in\mathbb{R}^3, \tag{1}$$

où γ et α sont deux constantes positives. Il s'agit de montrer que le système

$$\begin{cases} \partial_t E - \mathrm{curl} H &= 0 \\ \partial_t H + \mathrm{curl} E &= -\partial_t M \\ \partial_t M &= F(M,H) \end{cases} \tag{2}$$

possède des solutions d'énergie finie globales en temps et propage certaines régularités.

On dira que $U=(E,H,M)$ est une solution d'énergie finie dans la bande $[0,T]$ si chaque composante E,H,M appartient à $C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)$, si M est dans $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ et si U satisfait (2) au sens des distributions avec

$$\mathrm{div}E = \mathrm{div}(H+M) = 0.$$

Pour de telles solutions le théorème linaéire sur les systèmes symétriques assure que l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|E(t,x)|^2 + |H(t,x)|^2)\,dx\,, \quad 0\le t\le T$$

* Research partially supported by the U.S. National Science Foundation, U.S. Office of Naval Research, and the NSF-CNRS cooperation program under grants number NSF-DMS-9203413 and OD-G-N0014-92-J-1245 NSF-INT-9314095 respectively, and the CNRS through the Groupe de Recherche G1180 POAN.

est soit constante en fonction du temps, si $\alpha = 0$ dans (1), soit décroissante si $\alpha > 0$. De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, la quantité

$$|M(t,x)|\,,\quad 0 \leq t \leq T \tag{3}$$

est invariant au cours du temps.

Définition. *On note $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel formé par les distributions sur $\mathbb{R}^3$ $U_0 = (E_0, H_0, M_0)$ qui appartiennent à $L^2 \times L^2 \times (L^2 \cap L^\infty)$ et qui satisfont* $\mathrm{div} E_0 = \mathrm{div}(H_0 + M_0) = 0$. *L'espace $\mathcal{U}$ est normé par*

$$\|U_0\|_{\mathcal{U}} = \|E_0\|_2 + \|H_0\|_2 + \|M_0\|_{L^2 \cap L^\infty}.$$

Si U est une solution d'énergie finie, la quantité $\|U(t)\|_{\mathcal{U}}$ décroît au sens large avec le temps.

2. Résultats sur le problème de Cauchy

On fait les hypothèses suivantes sur l'interaction. La fonction $(m,h) \mapsto F(m,h)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, est linéaire par rapport à h, s'annule pour $m = 0$ et satisfait

$$F(m,h) \cdot m = 0\,,\ m,\ h\ \in \mathbb{R}^3$$

$$F(m,h) \cdot h \leq 0\,,\ m,\ h\ \in \mathbb{R}^3$$

On notera $C(R)$ une constante telle que pour tout $|m|\,, |m'| \leq R$

$$|F(m',h) - F(m,h)| \leq C(R)\, |m' - m|\, |h|$$

La fonction donnée par

$$F(m,h) := \frac{\gamma}{1+\alpha^2} \left(h \wedge m + \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2 + |m|^2} - \delta} \left(m \wedge (h \wedge m) \right) \right)\,, \quad h, m \in \mathbb{R}^3,\ \delta > 0$$

satisfait toutes les propriétés. La fonction donnée par (1) qui est homogène de degré 1 par rapport à chaque variable est seulement localement lipschitzienne mais satisfait toutes les autres propriétés. Nous indiquerons plus loin les modifications que ceci entraine dans les résultats que nous présentons maintenant.

On note $\mathbf{U_0}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{U}$ tel que $\mathbf{M_0} = \{M_0;\ (E_0, H_0, M_0) \in \mathcal{U}\}$ soit dominé dans $L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

THÉORÈME 0. *L'ensemble* $\mathbf{U}$ *des solutions* U *d'énergie finie définies sur* $[0,\infty[\times\mathbb{R}^3$, *telles que* $U_{|t=0} \in \mathbf{U_0}$, *est non vide. Si de plus* $\mathbf{U_0}$ *est compact dans* $(L^2)^3$, *pour tout* $T > 0$, $\mathbf{U}_T = \mathbf{U}_{|[0,T\times\mathbb{R}^3}$ *est compact dans* $(C^0([0,T];L^2))^3$.

THÉORÈME 1. *Soit* $U_0 \in \mathcal{U}$ *tel que de plus* $\operatorname{rot} E_0$ *et* $\operatorname{rot} H_0$ *appartiennent à* $L^2(\mathbb{R}^3)$. *Alors il existe une unique solution d'énergie finie définie sur* $[0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ *telle que* $U_{|t=0} = U_0$. *De plus* $\operatorname{rot} E$ *et* $\operatorname{rot} H$ *appartiennent à* $C^0([0,\infty[;L^2)$.

THÉORÈME 2. *Soit* $U_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. *Alors il existe une unique solution globale d'énergie finie* $U \in C^0([0,\infty[;H^2)$ *telle que* $U_{|t=0} = U_0$.

Le premier résultat établit l'existence de solution d'énergie finie globale et prouve leur stabilité. Pour tout $T > 0$, l'application qui, à des données initiales associe la solution du problème de Cauchy est continue de $\mathbf{U_0}$ muni de la topologie de L^2 dans $C^0([0,T[;L^2)$. Le second résultat concerne l'unicité du problème de Cauchy sous l'hypothèse que les données sont plus régulières ; en outre cette régularité supplémentaire se propage. Le dernier résultat montre que les solutions locales du problème de Cauchy dans l'algèbre $H^2(\mathbb{R}^3)$ sont en fait globales.

Les preuves des théorèmes 1 et 2 utilisent une inégalité de Strichartz limite pour laquelle la dimension d'espace $d = 3$ apparait comme critique. Les théorèmes 1 et 2 sont vrais pour $d \leq 3$. En revanche le théorème 0 ne nécessite aucune restriction sur la dimension d'espace.

Les théorèmes 0 et 1 restent vrais pour une fonction F qui est seulement localement lipschitzienne comme celle qui est donnée par (1). Le théorème 2 peut être remplacé par un résultat d'approximation de type Galerkine.

Le modèle (1), (2) est discuté dans [JV1]. Le problème de Cauchy en dimension d'espace $d = 1$ ainsi que d'autres propriétés (comportement asymptotique, approximation numérique ...) du modèle sont étudiés dans [JV1], [JV2].

3. Une estimation a priori sur les rotationnels de E et H

On introduit la décomposition orthogonale habituelle de L^2

$$L^2 = L^2_{\parallel} \oplus L^2_{\perp},$$

l'opérateur de projection $P_{\parallel}$ donnant la composante de rotationnel nul et $P_{\perp}$ celle dont la divergence est nulle. On utilisera la même notation pour les homologues de ces opérateurs agissant dans les espace L^p, $1 < p < \infty$. Si U est une solution d'énergie finie, sa composante H n'est pas en général à divergence nulle. On a $H = H_{\perp} + H_{\parallel}$ avec la relation $H_{\parallel} + M_{\parallel} = 0$: l'onde H est donc, compte tenu de (3), la superposition de deux ondes non nulles se propageant aux vitesses 1 et 0 respectivement dans la partie de l'espace où $M_0(x) \neq 0$.

PROPOSITION 3. *Soit U une solution d'énergie finie suffisamment régulière sur l'intervalle $[0,T]$. Il existe alors une constante C dépendant de T, de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$ et des normes de* $\operatorname{rot} E(0)$ *et* $\operatorname{rot} H(0)$ *dans L^2 telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \big(\|\operatorname{rot} E(t)\|_2 + \|\operatorname{rot} H(t)\|_2\big) \le C.$$

On commence par remarquer que les normes L^2 des rotationnels de $E(t)$ et $H(t)$ sont contrôlées par celle du gradient complet de $H_\perp(t)$ avec des constantes ne dépendant que de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$. On constate ensuite que $H_\perp$, dont la norme dans $C^0\big([0,T];L^2)\big)$ est contrôlée par $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$, satisfait une équation des ondes semi-linéaire dont le terme de source g vérifie essentiellement

$$\|g(t)\|_2 = O(\|\,|H_\perp(t)|^2\|_2),$$

avec des constantes ne dépendant que de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$.

L'objectif est donc d'obtenir une estimation a priori sur l'énergie à l'instant $0 \le t \le T$

$$n(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2}.$$

d'une fonction scalaire u régulière qui satisfait

$$\Box u = g\,, \quad \|g(t)\|_2 = O(\|\,u(t)^2\|_2) \tag{4}$$

en fonction de son énergie à $t=0$ et avec des constantes ne dépendant que de la norme de u dans $C^0\big([0,T];L^2)\big)$. Lorsque $d=2$, l'inégalité de Sobolev $\|v\|_2 \le C\|\partial v\|_1$ appliquée à $v = u^2$ permet de linéariser le carré dans (4) et d'obtenir immédiatement le résultat.

Pour $d=3$ il est naturel de penser utiliser les estimations $L^q(L^p)$. Si p et q sont des réels tels que

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2}\,, \quad q > 2,$$

alors toute fonction régulière vérifie l'inégalité de Strichartz généralisée (cf. [GV] par exemple)

$$\|u\|_{L^q([0,T];\,L^p(\mathbb{R}^3))} \le C_{q,p,T}\big(n(0) + \|\Box u\|_{L^1([0,T];\,(L^2(\mathbb{R}^3))}\big),$$

Cependant le cas qui nous intéresse : $q=2, p=\infty$ est exclu. La constante $C_{q,p,T}$ explose comme p lorsque $p \to +\infty$; des contrexemples de Lindblad [L] et Klainerman et Machedon [KM] indiquent qu'il est impossible d'espérer l'estimation pour

$q=2$ et $p=+\infty$. Cependant la stratègie consiste à suivre cette idée en s'appuyant sur le résultat suivant qui est une inégalité de Strichartz précisée en fréquence dans le cas limite $q=2$ et $p=+\infty$.

Définissons pour $\lambda>1$ la famille de troncatures en fréquences $S_\lambda=\varphi(\lambda^{-1}D_x)$ où $\varphi\in C_0^\infty$ vaut 1 sur $|\xi|=1$ et a son support dans $|\xi|\le 2$.

Lemme 4. *Il existe une constante c telle que pour tout $\lambda>0$, tout $T>0$ et toute fonction $u\in C^0\big([0,\infty[;H^2(\mathbb{R}^3)\big)$,*

$$\|S_\lambda(u)\|_{L^2([0,T];\,L^\infty(\mathbb{R}^3))}\le c\sqrt{\log(1+\lambda T)}\big(n(0)+\|\Box u\|_{L^1([0,T];\,(L^2(\mathbb{R}^3))}\big). \tag{5}$$

Soit $u\in C^0\big([0,T];H^2(\mathbb{R}^3)\big)$ solution de (4). Posons $\alpha_\lambda(s)=\|S_\lambda(u)(s)\|_\infty$. Soit $(t_p)_p$ une suite finie strictement croissante de réels commençant avec $t_0=0$ et qui est bornée supérieurement par T. Introduisons les quantités

$$m(t_p,t_{p+1})=\sup_{t_p\le s\le t_{p+1}} n(s)+\sup_{\lambda\ge 0,\,t_p\le t\le t_{p+1}}\frac{\sqrt{\int_{t_p}^t\alpha_\lambda(s)^2ds}}{c\sqrt{\log(1+\lambda(t-t_p)}},\quad p\ge 0. \tag{6}$$

De l'estimation d'énergie pour $\Box$,

$$n(t_{p+1})\le n(t_p)+\int_{t_p}^{t_{p+1}}\|\Box u(s)\|_2ds,$$

du Lemme 4, appliqué entre t_p et t_{p+1} et de (6) résulte que

$$m(t_p,t_{p+1})\le 2\,(n(t_p)+\int_{t_p}^{t_{p+1}}\|\Box u(s)\|_2ds). \tag{7}$$

D'après (4) il existe une constante C qui ne dépend que de $\|u\|_{C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)}$ telle que $\|\Box u(s)\|_2\le C\|u(s)^2\|_2$. On écrit $u^2=uS_\lambda(u)+u(I-S_\lambda)(u)$ de sorte que $\|u(s)^2\|_2\le C(\alpha_\lambda(s)+\frac{n(s)^2}{\sqrt{\lambda}})$ où C ne dépend que de $\|u\|_{C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)}$. Reportant cette inégalité dans (7), on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $m(s,t)$, que pour tout $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}m(t_p,t_{p+1})&\le 2n(t_p)+\\ &C\sqrt{(t_{p+1}-t_p)\log(1+\lambda(t_{p+1}-t_p))}\,m(t_p,t_{p+1})+C\int_{t_p}^{t_{p+1}}\frac{m(t_p,s)^2}{\sqrt{\lambda}}ds,\end{aligned} \tag{8}$$

où C ne dépend que de $\|u\|_{C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)}$. Là on majore $n(t_p)$ par $m(t_{p-1},t_p)$, on choisit $\lambda=m(t_p,t_{p+1})^2$ et on majore l'intégrale dans (8) grâce à la croissance de m. Pour simplifier, posons

$$m_0=n(0),\quad m_p=m(t_{p-1},t_p),\quad \delta_p=t_p-t_{p-1},\quad p\ge 1.$$

L'inégalité (8) devient

$$\frac{m_{p+1}-m_p}{m_p} \leq 1 + C\sqrt{\delta_{p+1}\log(1+\delta_{p+1}m_{p+1}^2)}\,\frac{m_{p+1}}{m_p} + C\,\delta_{p+1}\frac{m_{p+1}}{m_p}, \quad p \geq 1. \tag{9}$$

Le choix

$$\delta_p = \inf\Big(\frac{1}{4C}, \frac{1}{16C^2\log(1+\frac{4m_{p-1}^2}{C})}\Big), \quad p \geq 1 \tag{10}$$

assure que les deux derniers termes à droite de (9) sont inférieurs à 1 si l'on y remplace m_{p+1} par $4m_p$. Ceci implique que pour tout $t_p \leq s < t_{p+1}$, $\frac{m(t_p,s)-m_p}{m_p} < 3$ donc que $\frac{m_{p+1}-m_p}{m_p} \leq 3$. Par récurrence, il en résulte que

$$m_p \leq 4^p n(0), \quad p \geq 1. \tag{11}$$

Comme δ_p donné par (10) vérifie, à cause de (11),

$$\delta_p \geq \frac{1}{32C^2\log(1+2\frac{4^{p-1}n(0)}{\sqrt{C}})},$$

le réel t_p est minoré par $C_1 \log p$, donc supérieur à T pour p supérieur à e^{T/C_1}, ce qui achève la preuve de la Proposition 3.

4. Estimation $H^2(\mathbb{R}^3)$

Proposition 5. *Soit $T>0$ et U une solution d'énergie finie sur $[0,T]$ suffisamment régulière. Alors il existe une constante C ne dépendant que de $\|U(0)\|_{H^2}$* telle que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|U(t)\|_{H^2} \leq C.$$

On écrit les équations pour les dérivées de U. Notant L l'opérateur différentiel intervenant dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} LU = O(H), \quad & L(\partial_x U) = O(|H||\partial_x M|), \\ & L(\partial_x^2 U) = O(|\partial_x^2 M|, |\partial_x H||\partial_x M|, |H||\partial_x^2 M|, |H||\partial_x M|^2) \end{aligned}$$

où les constantes dans les O ne dépendent que de la norme $\|M_0\|_\infty$.
Examinons l'équation pour $\partial_x^2 U$, l'équation pour $\partial_x U$ se traitant de façon analogue. On a $\||H(t)||\partial_x M(t)|^2\|_2 = O(\||H(t)||\partial_x^2 M(t)|\|_2)$ la constante ne dépendant que de $\|M_0\|_\infty$. Posons

$$n_2(t) = \sup_{0\leq t\leq T}\|\partial_x^2 U(t)\|_2.$$

On montre que

$$\| \, |\partial_x H(t)| \, |\partial_x M(t)| \, \|_2 \leq C(n_2(t) + \alpha_\lambda(t) n_2(t) + \frac{n_2(t)^2}{\sqrt{\lambda}}) \tag{12}$$

et, en utilisant l'inégalité suivante du type Judovic,

$$\|M_\|(t)\|_\infty \leq C(\|M_0\|_{L^2 \cap L\infty}) \log(\frac{\|\partial_x^2 M(t)\|_2}{\|M_0\|_\infty})$$

que

$$\| \, |H(t)| \, |\partial_x^2 M(t)| \, \|_2 \leq C(n_2(t) \log n_2(t) + \alpha_\lambda(t) n_2(t) + \frac{n_2(t)^2}{\sqrt{\lambda}}), \tag{13}$$

où, dans (12) et (13) la constante C ne dépendent que de $\|M_0\|_{L^2 \cap L^\infty}$. L'estimation d'énergie pour le système symétrique L donne

$$n_2(t) \leq n_2(0) + C \int_0^t \big((1 + \alpha_\lambda(s)) n_2(s) + n_2(s) \log n_2(s) + \frac{n_2(s)^2}{\sqrt{\lambda}}\big) \, ds, \, 0 \leq t \leq T.$$

Choisissons $\sqrt{\lambda} = n_2(T)$. L'inégalité précédente donne

$$n_2(t) \leq n_2(0) + C \int_0^t \big((2 + \alpha_\lambda(s)) n_2(s) + n_2(s) \log n_2(s)\big) \, ds, \, 0 \leq t \leq T.$$

Soit $n_2^\sharp(t)$ la solution de

$$\frac{d}{dt} n_2^\sharp(t) = C\big((2 + \alpha_\lambda(s)) n_2^\sharp(s) + n_2^\sharp(s) \log n_2^\sharp(s)\big), 0 \leq t \leq T, \, n_2^\sharp(0) = n(0).$$

La fonction $n_2^\sharp(t)$ majore $n_2(t)$ pour $0 \leq t \leq T$ et satisfait

$$\log n_2^\sharp(t) \leq e^{Ct}\big(\log n_2(0) + C\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \alpha_\lambda(s)^2 ds} + 2Ct\big), \, 0 \leq t \leq T. \tag{14}$$

En utilisant (6) et la fin de la démonstration de la Proposition 3, on majore $\sqrt{\int_0^t \alpha_\lambda(s)^2 ds} = \sqrt{\sum_{t_{p+1} \leq T} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \alpha_\lambda(s)^2 ds}$ par $C(T, n(0))\sqrt{\log(1 + n_2(T)T)}$.
On déduit alors de (14) avec $t = T$ une majoration de $n_2(T)$ en fonction de T, $n(0)$ et $n_2(0)$.

La preuve du Théorème 2 est claire. Soit $U(0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Supposons que le temps de vie T de la solution U du problème de Cauchy semi-linéaire (2) de données $U(0)$ soit fini. On sait qu'alors $\lim_{t \to T} \|U(t)\|_\infty = +\infty$ ce qui contredit la Proposition 4 qui affirme que $\lim_{t \to T} \|U(t)\|_{H^2} \leq +\infty$. La solution locale U est donc globale.

4. Le Théorème 0 et la stabilité L^2

Soient $(U^n)_n$ une suite de solutions d'énergie finie dans la bande $[0,T]$ telle que la suite $(U^n(0))_n$ converge dans L^2 vers un élément qu'on peut noter $U^\infty(0)$. A cause de l'estimation dans l'espace $\mathcal{U}$ on peut supposer que la suite $(U^n)_n$ converge faiblement dans $L^\infty\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ vers un élément qu'on note U^∞. L'objectif est de montrer que la convergence de U^n vers U^∞ a lieu dans $C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)$. La clé est une estimation L^2 sur la différence $M^p(t)-M^q(t)$ en fonction de $M^p(0)-M^q(0)$. En écrivant

$$\begin{aligned} F(M^p,H^p)-F(M^q,H^q) &= F(M^p,H^\infty)-F(M^q,H^\infty) \\ &\quad +F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty), \end{aligned}$$

on constate que, si $|M_0^n(x)|\le R$, on a, pour presque tout (t,x),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t|M^p-M^q|^2 &\le C(R)|H^\infty||M^p-M^q|^2 \\ &\quad +\big(F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty)\big)\cdot(M^p-M^q). \end{aligned}$$

Le poids ponctuel $e^{-2a(t,x)}$ absorbe le premier terme du membre de droite si a est une primitive en t de $C(R)|H^\infty(t,x)|$. Le choix précis

$$a(t,x)=|x|^2+\int_0^t C(R)|H^\infty(s,x)|ds \tag{15}$$

fournit une fonction positive, définie et finie pour presque tout x et tout t et telle que, de plus, $e^{-2a(t,x)}$ appartient à tous les L^p, $1\le p\le\infty$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t(e^{-2a}|M^p-M^q|^2) &\le \\ & e^{-2a}\big(F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty)\big)\cdot(M^p-M^q). \end{aligned} \tag{16}$$

Proposition 5 *Il existe une constante $C(R,T)$ telle que pour tout $\delta>0$ il existe $N(\delta)$ tel que pour tout $p\ge N(\delta)$ et $q\ge N(\delta)$,*

$$\|e^{-2a(t)}(M^p(t)-M^q(t))\|_2\le C\left(\delta+\int_0^t\|e^{-2a(s)}(M^p(s)-M^\infty(s))\|_2ds\right) \tag{17}$$

Passant à la limite $q\to\infty$ dans le membre de gauche de (17), on en déduit que la suite $M^p(t)-M^\infty(t)$ tend vers 0 dans l'espace $L^2(e^{-2a(t,x)}dx)$ puis le résultat final avec des arguments classiques.

La preuve de la Proposition 5 passe par l'examen du terme $F(M^p, H^p - H^\infty)$ dans (16), qu'on décompose en la somme

$$F(M^p, H^p - H^\infty) = F(M^p, P_\perp(H^p - H^\infty)) + F(M^p, P_\|(H^p - H^\infty)). \tag{18}$$

L'intégrale en t, x du premier terme à droite de (18) donne une contribution δ, grâce à un argument de front d'onde une fois qu'on a remarqué qu'il s'agit du produit d'un terme en M qui possède une dérivée par rapport à t bornée dans L^2 et d'un terme $P_\perp(H^p - H^\infty)$ qui est borné dans L^2 avec $\Box(P_\perp(H^p - H^\infty))$ borné dans H^{-1}.

L'autre terme $e^{-2a(t)}F(M^p(t), P_\|(H^p(t) - H^\infty(t))) = e^{-2a(t)}F(M^p(t), P_\|(M^\infty(t) - M^p(t)))$ s'écrit, après multiplication par $(M^p(t) - M^q(t))$, comme la somme dans L^1

$$\begin{aligned} &F(M^p(t), P_\| e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t)) \\ &\quad + F(M^p(t), [e^{-a(t)}, P_\|](M^\infty(t) - M^p(t)) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t)). \end{aligned} \tag{19}$$

La norme dans L^1 du premier terme se majore par une somme de carrés de normes L^2

$$\begin{aligned} &\|F(M^p(t), P_\| e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t))\|_1 \\ &\quad \le \frac{1}{2}R^2C(R)^2\|e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))\|_2^2 + \frac{1}{2}\|e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t))\|_2^2, \end{aligned}$$

le deuxième terme de (19) donne une contribution δ car le commutateur $[e^{-a(t)}, P_\|]$ est un opérateur compact sur les parties de L^2 dominées dans $L^2 \cap L^\infty$ (on utilise (15)).

La partie concernant l'existence de solutions globales L^2 du Théorème 0 peut maintenant se démontrer de la façon suivante. On approche les données initiales par régularisation par des unités approchées. Ces approximations forment un sous-ensemble $\mathbf{U_0}$ satisfaisant les propriétés données à la section 2. Le théorème 2 associe aux données régulières des solutions globales du problème de Cauchy. La condition de stabilité L^2 du Théorème 0 achève la preuve.

[GV] Ginibre J., Velo G., Generalized Strichartz Inequalities for the Wave Equation, J. Funct. Anal., **133** (1995), n 1, 50–68.

[JV1] Joly P., Vacus O., Mathematical and Numerical Studies of 1D Nonlinear Ferromagnetic Materials, Rapport INRIA, n 3024, 1996.

[JV2] Joly P., Vacus O., Maxwell's Equations in a 1D Ferromagnetic Medium : Existence and Uniqueness of Strong Solutions, Rapport INRIA, n 3052, 1996.

[KM] Klainerman S., Machedon M., Space-time estimates for null-form and the local existence theorem, Com. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1221–1268.

[L] Lindblad H., Counterexamples to local existence for semi-linear Wave Equation, Amer. J. Math. **118** (1996), n 1, 1–16.