Composition: Equations différentielles

16 octobre 2017
durée 2h

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'(t) = f(t, y)$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue .

On suppose que f est bornée: il existe $M > 0$ tel que $\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |f(t, y)| \leq M$.

Montrer que les solutions maximales sont globales.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle:

$$(E)\ y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

On suppose que p et q sont développables en série entière en 0 de rayon de convergence $R > 0$. On a donc $p(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n\geq 0} q_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$. On admet que pour tout $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, (E) possède une unique solution maximale telle que $\begin{cases} y(0) = c_0 \\ y'(0) = c_1 \end{cases}$, définie sur $]-R, R[$. Le but de l'exercice est de montrer que la solution correspondante est développable en série entière sur $]-R, R[$.

1) Supposons le problème résolu. Soit y une fonction développable en série entière. On notera $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)a_{n+1-j}p_j - \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}q_j.$$

En déduire que, si elle existe, il existe une unique série entière solution du problème de Cauchy correspondant à $y(0) = c_0, y'(0) = c_1$.

La suite de l'exercice consiste à monrer que la "série formelle" obtenue ci-dessus a un rayon de convergence $\geq R$.

2) Soit $0 < r < R$ fixé, justifier qu'il existe une constante $C := C_r$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)|p_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}} \text{ et } |q_n| \leq \frac{C}{r^n}.$$

On va maintenant chercher M tel que pour tout $n \geq 0$,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}. \tag{1}$$

3) Soit $n \geq 0$ supposons que (1) est satsifaite pour tout $0 \leq k \leq n+1$. Montrer qu'alors

$$(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq 2(n+1)\left(\frac{CM}{r^n}\right).$$

4) En déduire qu'il existe un entier $N := N_r$ indépendant de la valeur de M telle que si (1) est satisfaite pour tout $0 \leq k \leq n$ pour un certain $n \geq N$ alors (1) est aussi vérifiée pour $n+1$.

5) En déduire une valeur de M pour laquelle (1) est satisfaite pour tout $n \geq 0$.

6) Conclure.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \, x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

où q est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que les solutions sont globales et que les zéros d'une solution non identiquement nulle sont isolés.

1) En utilisant Cauchy-Lipshitz, justifier que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2.

2) Soient f et g deux solutions de (E). On considère le Wronskien: $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Montrer que W est constant.

3) On suppose que f et g sont 2 solutions de (E) et qu'elles sont linéairement indépendantes. Soient $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de f, montrer qu'il existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tel que $g(\gamma) = 0$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle de Riccati sur $[0, +\infty)$ $(E) : \; y'(t) = y^2(t) - \alpha(t)$ où α est une fonction continue de $[0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que z_0 est une solution définie globalement sur $[0, +\infty)$ et qu'elle est positive: $z_0(t) > 0$, pour $t \geq 0$.

On note $a = z_0(0)$.

1) Soit $b > a$ et soit z_1 la solution maximale de (E) telle que $z_1(0) = b$. Elle est définie sur un intervalle $[0, \beta[$. Justifier que pout tout $t \in [0, \beta[$, $z_1(t) \geq z_0(t)$.

2) On note $u = z_1 - z_0$, montrer que $u'(t) \geq u^2(t)$. En déduire que la solution maximale z_1 n'est pas globale.

3) Soit $0 < c < a$ et soit z_2 la solution maximale de (E) telle que $z_2(0) = c$. Montrer que z_2 s'annule.