Composition: Equations différentielles

24 octobre 2018
durée 2h30

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'on a $\varphi(1) = \varphi(\sqrt{3})$.

1) Montrer que φ est périodique.

2) Le résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement f continue.

Exercice 2. Soit $f : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f(t,x)\mathbb{R}$. On suppose que f est globalement K Lipschitzienne par rapport à x uniformément à t ($K > 0$):

$$\forall t \in \mathbb{R}, x, x' \in \mathbb{R}, |f(t,x) - f(t,x')| \leq K|x - x'|.$$

Soient x_1 et x_2 deux fonctions continues, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On suppose que x_1 et x_2 sont deux ε-solutions approchées de l'équation différentielle: $x'(t) = f(t, x(t))$, au sens où pour $i = 1, 2$:

$$|x_i'(t) - f(t, x_i(t))| \leq \varepsilon, \text{ là où } x_i \text{ est dérivable.}$$

On note $\delta = |x_1(0) - x_2(0)|$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \delta e^{K|t|} + 2\varepsilon \left(\frac{e^{K|t|} - 1}{K} \right)$$

On pourra commencer par montrer que pour $t \geq 0$,

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \delta + 2\varepsilon|t| + K \int_0^t |x_2(s) - x_1(s)| ds.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle:

$$(E)\ y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

On suppose que p et q sont développables en série entière en 0 de rayon de convergence $R > 0$. On a donc $p(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n \geq 0} q_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$. On admet que pour tout $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, (E) possède une unique solution maximale telle que $\begin{cases} y(0) = c_0 \\ y'(0) = c_1 \end{cases}$, définie sur $] - R, R[$. Le but de l'exercice est de montrer que la solution correspondante est développable en série entière sur $] - R, R[$.

1) Supposons le problème résolu. Soit y une fonction développable en série entière. On notera $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)a_{n+1-j}p_j - \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}q_j.$$

En déduire que, si elle existe, il existe une unique série entière solution du problème de Cauchy correspondant à $y(0) = c_0, y'(0) = c_1$.

La suite de l'exercice consiste à montrer que la "série formelle" obtenue ci-dessus a un rayon de convergence $\geq R$.

2) Soit $0 < r < R$ fixé, justifier qu'il existe une constante $C := C_r$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)|p_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}} \text{ et } |q_n| \leq \frac{C}{r^n}.$$

On va maintenant chercher M tel que pour tout $n \geq 0$,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}. \tag{1}$$

3) Soit $n \geq 0$ supposons que (1) est satsifaite pour tout $0 \leq k \leq n+1$.
Montrer qu'alors

$$(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq 2(n+1)\left(\frac{CM}{r^n}\right).$$

4) En déduire qu'il existe un entier $N := N_r$ indépendant de la valeur de M telle que si (1) est satisfaite pour tout $0 \leq k \leq n$ pour un certain $n \geq N$ alors (1) est aussi vérifiée pour $n+1$.

5) En déduire une valeur de M pour laquelle (1) est satisfaite pour tout $n \geq 0$.

6) Conclure.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle de Riccati sur $[0, +\infty)$ $(E) :\ y'(t) = y^2(t) - \alpha(t)$ où α est une fonction continue de $[0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que z_0 est une solution définie globalement sur $[0, +\infty)$ et qu'elle est positive: $z_0(t) > 0$, pour $t \geq 0$.

On note $a = z_0(0)$.

1) Soit $b > a$ et soit z_1 la solution maximale de (E) telle que $z_1(0) = b$. Elle est définie sur un intervalle $[0, \beta[$. Justifier que pout tout $t \in [0, \beta[$, $z_1(t) \geq z_0(t)$.

2) On note $u = z_1 - z_0$, montrer que $u'(t) \geq u^2(t)$. En déduire que la solution maximale z_1 n'est pas globale.

3) Soit $0 < c < a$ et soit z_2 la solution maximale de (E) telle que $z_2(0) = c$. Montrer que z_2 s'annule.