Composition

2 octobre 2017
durée 2h

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que $f(x,y) = o(x,y)$ pour (x,y) proche de $(0,0)$. En déduire que f est différentiabe en $(0,0)$ et donner sa différentielle en $(0,0)$.

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} f(0,x)$$

existent et les calculer.

3) Calculer $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$. La fonction f est-elle 2 fois différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit U un ouvert de E, soit $a \in U$, et soit $f : U \to F$. On suppose que f est continue sur E, différentiable sur $E \setminus \{a\}$, et que $Df(x)$ admet une limite L dans $\mathcal{L}(E,F)$ quand x tend vers a. Montrer que f est différentiable en a et $Df(a) = L$.

Indication: On pourra considérer la fonction

$$g(x) = f(x) - f(a) - L(x-a).$$

Exercice 3.
On considère $U = GL(n\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $X \in U$, on pose $f(X) = X^{-1}$.

On note $\|\cdot\|$ une norme multiplicative sur E, c'est-à-dire d'une norme vérifiant $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|, X, Y \in E$.

1) Pour $\|K\| < 1$, justifier proprement que l'inverse de $(Id - K)$ existe et est donné par $\sum_{n \geq 0} K^n$.

2) Montrer que U est un ouvert de E.

3) Montrer que f est différentiable en l'identité.

4) En déduire que f est différentiable en tout point $X \in U$ et calculer sa différentielle en tout point $X \in U$.

Exercice 4.

A) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||f(x) - f(y)|| \geq C||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Df(x) \cdot v\| \geq C\|v\|$.

3) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

B) (bonus, à ne faire que s'il vous reste du temps)

Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que g est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$g((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

1) On suppose g différentiable sur $\mathbb{R}^n$, montrer que g est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y - x \rangle$$

avec $\nabla g(x)$ le vecteur $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)$ et où $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

2) On suppose maintenant que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $f(x) = x + \nabla g(x)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2.$$

3) Déduire de ce qui précède que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.