Prépa-agreg 2014-2015 Université de Bordeaux

Composition 3

22 septembre 2014
durée 2h

Exercice 1.

1) On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y > 0\}$ et $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ v^2 - 4u > 0\}$. Représenter les ouverts U et V.
2) Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (xy, x + y)$. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme de U sur V.
3) Déterminer toutes les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0.$$

On montrera que ce sont exactement toutes les fonctions s'écrivant sous la forme: $h(x + y)e^{3xy}$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2.

On considère $U = GL(n\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $X \in U$, on pose $f(X) = X^{-1}$.
1) Justifier l'existence d'une norme multiplicative sur E, c'est-à-dire d'une norme vérifiant $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|, X, Y \in E$.
2) Pour $\|K\| < 1$, justifier proprement que l'inverse de $(Id - K)$ existe et est donné par $\sum_{k\geq 0} K^k$.
3) Montrer que U est un ouvert de E.
4) Montrer que f est différentiable en l'identité.
5) En déduire que f est différentiable en tout point $X \in U$ et calculer sa différentielle en tout point $X \in U$.
6) Montrer que f est deux fois différentiable et calculer sa différentielle en tout point $X \in U$.
7) Ecrire sa formule de Taylor à l'ordre 2 en un point $X \in U$.

Exercice 3.

A) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||f(x) - f(y)|| \geq C||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
1) Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Df(x) \cdot v\| \geq C\|v\|$.
3) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

B) Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que g est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

1) On suppose g différentiable sur $\mathbb{R}^n$, montrer que g est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y - x \rangle$$

avec $\nabla g(x)$ le vecteur $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)$ et où $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
2) On suppose maintenant que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $f(x) = x + \nabla g(x)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2.$$

3) Déduire de ce qui précède que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.