Exercice 1 :

A) On cherche les points critiques de f.

On a : $Df_{(x,y)} = \left(2x - 3(1-x)^2 y^2,\ 2(1-x)^3 y\right)$

$$Df_{(x,y)} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3(1-x)^2 y = 0 \\ 2(1-x)^3 y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } y = 0 \\ 2x - 3(1-x^2)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ 2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(impossible)

f admet un unique point critique : $(0,0)$.

On a $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) \geq 0$ si $|x| \leq 1$.

donc $(0,0)$ est un minimum local.

$(0,0)$ est donc l'unique ~~extremum~~ local de f.

(On aurait aussi pu calculer $D^2 f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Id}$

matrice symétrique définie positive)

pour montrer que $(0,0)$ est un minimum local.

- $f(2,y) = 4 - y^2$ n'est pas minorée

$\left(\xrightarrow[|y| \to +\infty]{} -\infty\right)$

donc le minimum n'est pas global.

B) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ (dérivable suffit)

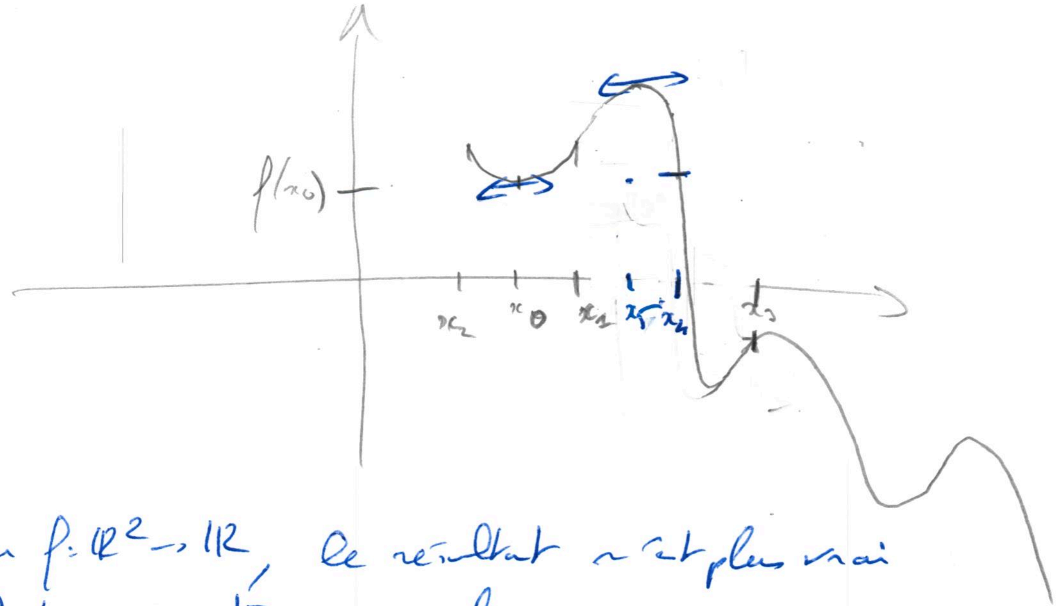
On suppose que f n'est pas minorée et qu'elle admet un minimum local en x_0.

- x_0 est un minimum local donc il existe $\delta > 0$ tel que si $|x' - x_0| \leq \delta$ avec $f(x) \geq f(x_0)$.
- Si pour tout $x' \in [x, x+\delta]$ $f(x') = f(x_0)$ on a $f'(x') = 0$ pour tout $x' \in [x, x+\delta]$. (De même pour $x' \in [x-\delta, x)$)
- Sinon $\exists$ $x_1 > x_0$ et $x_2 < x_0$ tel que $f(x_1) > f(x_0)$
$f(x_2) > f(x_0)$.

f est non minorée donc $\exists$ $x_3 \in \mathbb{R}$, $f(x_3) < f(x_0)$.

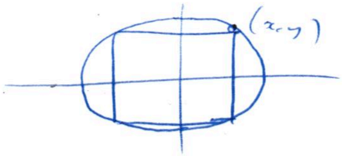
Un des segments $[x_1, x_3]$ ou $[x_3, x_2]$ ne contient pas x_0.
Notons le $[a,b]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires.
$\exists$ $x_4 \neq x_0$ tel que $f(x_4) = f(x_0)$.

Puis par le théorème de Rolle, $\exists x_5 \neq x_0$ tel que $f'(x_5) = 0$.



- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le résultat n'est plus vrai
Ajout un contre-exemple.

Exercice 2 :



On cherche à maximiser la fonction $4xy$ sous les contraintes $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$.

. Appelons $\begin{cases} f(x,y) = 4xy \\ g(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$

$\mathcal{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$ est compact

. f est continue sur $\mathcal{C}$ donc atteint son maximum.

Il n'est pas atteint pour $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = b \end{pmatrix}$ ou pour $\begin{pmatrix} y = 0 \\ x = a \end{pmatrix}$.

Soit (x,y) un maximum de f sur $\mathcal{C}$. On a $x > 0$ et $y > 0$.

D'après le théorème des extrema liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_{(x,y)} = \lambda\, dg_{(x,y)}$

ie : $\begin{cases} 4y = 2\dfrac{\lambda}{a^2} x \\ 4x = 2\dfrac{\lambda}{b^2} y \end{cases}$ (S)

On cherche à résoudre : avec $x > 0$ et $y > 0$.
$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ 4y = 2\dfrac{\lambda}{a^2} x \\ 4x = 2\dfrac{\lambda}{b^2} y \end{cases}$ (S')

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \lambda = 2a^2 \dfrac{y}{x} \\ x = \left(\dfrac{a^2}{b^2}\right) \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2a^2 \dfrac{y}{x} \\ x^2 = \left(\dfrac{a^2}{b^2}\right) y^2 \\ 2\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ \lambda = 2ab \end{cases}$$

$y > 0$

- Il n'existe qu'un seul point "critique pour les extrema liés".

donc f admet un <u>unique maximum</u> sur $\mathcal{C}$ qui vaut $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

Rq : Sur $\mathcal{C}$, on peut écrire y en fonction de x :

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

et se ramener à un problème d'une variable réelle.

Ex 3 : On considère (E) $y'(t) = f(y(t))$

avec f continue. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une solution bornée de (E) sur $\mathbb{R}$.

On la note ϕ. ϕ étant bornée, elle est globale (thm des bouts).

On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a : $\phi'(t) = f(\phi(t)) > 0$

donc ϕ est croissante.

Or ϕ est bornée donc $\exists l \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

f étant continue, et $\phi'(t) = f(\phi(t))$

on obtient que $\phi'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} f(\phi(l)) > 0$.

Posons $l' = f(\phi(l)) > 0$.

Montrons alors que $\phi(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que si $t \geq A$

$\phi'(t) \geq \frac{l'}{2}$

En particulier $\phi(t) = \phi(A) + \int_A^t \phi'(u)\,du$

(car ϕ est $\mathcal{C}^1$)

donc $\phi(t) \geq \phi(A) + (t - A)\frac{l'}{2}$

et $\phi(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. (contradiction).

On raisonne de manière similaire si $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On déduit donc qu'il existe t_0 tel que $f(t_0) = 0$.

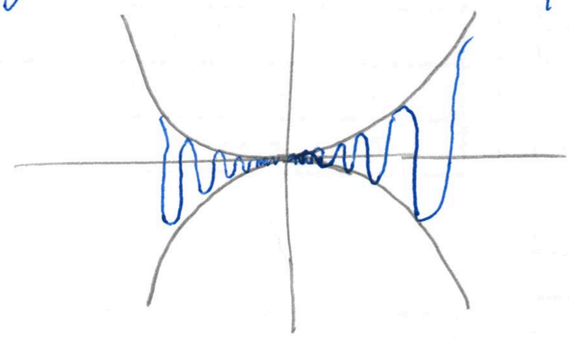
Exercice 4 :

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a : $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



(2). Si $x \neq 0$, f est dérivable et $f'(x) = \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{x\to 0 \\ \downarrow \\ 0}} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'a pas de limite}}$

donc f' n'est pas continue en 0.

• Par contre : $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est $\mathcal{C}^1$

et $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$, et $g(0) = 0$

Les zéros de g s'accumulent en 0.

(3) On considère l'équation : $y^{(5)}(t) + t^2 y^3(t) = 0$. (E)

La fonction nulle est une solution de l'équation différentielle de (E)

Elle vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz,

Il existe donc une unique solution de (E)

vérifiant les conditions :

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = y^{(3)}(a) = y^{(4)}(a) = 0.$$

Il s'agit donc de la fonction nulle.

Soit z une solution non identiquement nulle de (E).
Soit t_0 un zéro de z.
D'après ce qui précède, il existe $p \in \{1, 2, 3, 4\}$
tel que $z(t_0) = 0 = z'(t_0) = \dots = z^{p-1}(t_0)$
$z^p(t_0) \neq 0$.

D'après la formule de Taylor en t_0 :

$$z(t) = \underbrace{z(t_0)}_{=0} + (t-t_0)\underbrace{z'(t_0)}_{=0} + \dots + \frac{(t-t_0)^p}{p!} z(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t-t_0).$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$$= (t-t_0)^p \left[\frac{z(t_0)}{p!} + \varepsilon(t-t_0) \right]$$

$\left|\frac{z(t_0)}{p!}\right| > 0$

Par continuité de ε, $\exists\, \alpha > 0$, si $|t-t_0| \leq \alpha$

$$|\varepsilon(t-t_0)| \leq \frac{z(t_0)}{2\,p!}$$

et alors si $|t-t_0| \leq \alpha$ et $t \neq t_0$, $z(t) \neq 0$.

Conclusion : Les zéros de z sont bien isolés.

(Autre preuve : Si les zéros de z ont un point d'accumulation t_0.
$\exists\, t_n \to t_0$ tel que $z(t_n) = z(t_0) = 0$
Par Rolle $\exists\, s_n$ tel que $z'(s_n) = 0$
et $s_n \to t_0$ et z $\mathcal{C}^1$ implique $z'(t_0) = 0$.

Par Rolle, $\exists r_n$ tel que $g''(r_n) = 0$

et $r_n \to t_0$

g $\mathcal{C}^2$ implique $g''(t_0) = 0$.

g étant de classe $\mathcal{C}^5$ (au moins) et donc $\mathcal{C}^4$.

On a alors en itérant $g'''(t_0) = g^{(4)}(t_0) = 0$

Par Cauchy-Lipschitz, $g \equiv 0$.

• Exercice 5 :

$$\begin{cases} (E_0) : y'(t) = y^2(t) + \alpha(t) \\ (E_1) : y'(t) = y^2(t) + \alpha(t) + \beta(t) \\ (E_2) : y'(t) = y^2(t) + \alpha(t) - \beta(t) \end{cases}$$

avec $\beta(t) > 0$.

Soit z_0 une solution de E_0 globale sur $[0, +\infty)$ et $z_0(t) \geq 0$.

1) Soit z_1 la solution maximale de (E_1) telle que $z_1(0) = z_0(0)$
Elle est définie sur $[0, b[$.

$z_1'(0) = z_0'(0) + \beta(0)$

donc $z_1'(0) > z_0'(0)$.

donc il existe $a > b$ tel que : $z_1'(0) > a > b > z_0'(0)$.

Par continuité de z_1' et z_0' (elles sont C^1),

$\exists \delta > 0$, si $0 \leq s \leq \delta$, $\quad z_1'(s) \geq a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z_0'(s) \leq b$

Donc si $0 < t \leq \delta$,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0) + \int_0^t z_1'(s)\,ds \\ &\geq z_1(0) + at \\ &> z_0(0) + bt \geq z_0(0) + \int_0^t z_0'(s)\,ds \end{aligned}$$

donc si $0 < t \leq \delta$,

$z_1(t) > z_0(t)$.

Maintenant on a que z_0 constitue une barrière inférieure forte pour z_1.

En effet : soit $\tau = \inf\{t \geq \delta,\ z_1(t) = z_0(\delta)\}$.

Si $\tau < +\infty$ on a alors $z_1(\tau) = z_0(\tau)$

$z_1(t) > z_0(t)$ si $t < \tau$ (et $t \geq \delta$)

donc
$$\frac{z_1(\tau) - z_1(t)}{\tau - t} \leq \frac{z_0(\tau) - z_0(t)}{\tau - t}$$

et $t \to \tau$
$$z_1'(\tau) \leq z_0'(\tau).$$

Or puisque $z_1(\tau) = z_0(\tau)$, $z_1'(\tau) > z_0'(\tau)$.

contradiction.

donc $\tau = +\infty$

et $\boxed{z_1(t) > z_0(t)}$ pour tout $t \geq \delta$ (et tout $t > 0$).
(et là où z_1 est définie)
et $t \leq b$)

- On pose $u(t) = (z_1 - z_0)(t)$. On a : $u(\delta) > 0$ et.

$$u'(t) = z_1^2(t) - z_0^2(t) + \beta(t)$$
$$\geq (z_1 - z_0)^2(t) + \beta(t)$$
$$\geq u^2(t)$$

donc $\dfrac{u'(t)}{u^2(t)} \geq 1$ et en intégrant entre δ et t

et $\dfrac{1}{u(\delta)} - \dfrac{1}{u(t)} \geq t - \delta$

donc $0 < \frac{1}{u(t)} \leq \frac{1}{u(s)} + s - t$

donc $t \leq \frac{1}{u(s)} + s$.

$t \to b$ donc $b \leq \frac{1}{u(s)} + s < +\infty$

donc z_1 n'est pas globale.

2) Soit z_2 la solution maximale de (E_2) telle que

$z_2(0) = z_0(0)$.

Elle est définie sur $[0, a[$.

D'après 1), on a $z_2(t) < z_0(t)$ si $0 < t \leq a$

Supposons par l'absurde que z_2 ne s'annule pas.

On a $z_2(t) \geq 0$, donc $0 \leq z_2(t) < z_0(t)$

et z_2 serait bornée : si $a < +\infty$.

Par le théorème des bouts, $a = +\infty$.

et z_2 est une solution globale positive de (E_2).

Mais alors, d'après 1), en écrivant (E_0)

$y' = y^2 + (\alpha(t) - \beta(t)) + \beta(t)$

la solution z_0 ne serait pas globale. (contradiction)

Donc z_2 s'annule !